Livro de uso autorizado pelo Ministério da Educação e Cultura. Registrado na Comissão Nacional do Livro Didático sob n.º 1 337.

1 9 6 5

Impresso nos Estados Unidos do Brasil
Printed in the United States of Brazil

ARY QUINTELLA
Professor catedrático do Colégio Militar

MATEMÁTICA

para a

SEGUNDA SÉRIE GINASIAL
(Com 800 Exercícios)

87.ª edição

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

DO MESMO AUTOR

Curso Ginasial:

1. *Matemática*, primeira série.
2. *Matemática*, segunda série.
3. *Matemática*, terceira série.
4. *Matemática*, quarta série.

Curso Colegial:

5. *Matemática*, primeiro ano.
6. *Matemática*, segundo ano.
7. *Matemática*, terceiro ano.

Curso Comercial (esgotados):

8. *Aritmética Prática*, primeiro ano.
9. *Matemática*, segundo ano.
10. *Álgebra Elementar*, terceiro ano.
11. *Matemática*, (em preparo).

Curso de Admissão:

(Em colaboração com o Prof. Newton O'Reilly)
12. *Exercícios de Aritmética.*

(Em colaboração com o Prof. Vitalino Alves)
Questões de Concurso nas Escolas Superiores.
13. *Matemática.*

Artigo 91:

14. *Guia de Matemática.*

EDIÇÕES DA

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
Rua dos Gusmões, 639 – São Paulo 2, SP

★

Curso Normal:

(Em colaboração com o Prof. Francisco Junqueira)
Exercícios de Matemática.

ÍNDICE GERAL

UNIDADE II

CÁLCULO LITERAL; POLINÔMIOS

I. Expressões algébricas

II. Adição e subtração de expressões algébricas

III. Multiplicação de monômios e polinômios. Produtos notáveis

IV. Divisão de monômios e polinômios

V. Casos simples de fatoração

VI. Frações literais. Propriedade e operações

UNIDADE III

EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU COM UMA INCÓGNITA; SISTEMAS LINEARES COM DUAS INCÓGNITAS

I. Equações do primeiro grau com uma incógnita

II. Desigualdades. Inequações

III. Sistemas lineares com duas incógnitas

IV. Problemas do primeiro grau com uma e duas incógnitas

ÍNDICE DOS EXERCÍCIOS

MATEMÁTICA

UNIDADE I

Potências e Raízes — Expressões irracionais

I — POTÊNCIAS

1. Definições. Sabemos que um produto de fatôres iguais, como

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2,$$

denomina-se ***potência*** e é representado pela notação

$$2^5$$

O número 5, que indica quantos são os fatôres, é o ***expoente*** e o número 2 é a ***base*** da potência (1).

A operação pela qual determinamos a potência denomina-se ***potenciação.***

Exemplos: $7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$
$5^2 = 5 \times 5 = 25$
$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

343 é a terceira potência de 7, como 25 é a segunda potência de 5 e 16 a quarta potência de 2.

Quando duas potências têm o mesmo expoente, como 2^3 e 4^3, denominam-se ***potências semelhantes.***

2. Casos particulares. 1.º) Em virtude da definição, o expoente deve ser maior ou, no mínimo, igual a 2, pois não há multiplicação com menos de dois fatôres.

(1) Veja primeira série, Unidade I, n.º 37, do mesmo autor.

Convenciona-se, no entanto, considerar potências de expoente 1, cujo valor é, por definição, igual à base.

Exemplos: $27^1 = 27$
$5^1 = 5$

2.º) Tôda potência de 1 é igual a 1:

$$1^2 = 1 \times 1 = 1$$
$$1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

3.º) Tôda potência de zero é igual a zero.

4.º) As potências de 10 são as unidades de diversas ordens e obtêm-se, escrevendo à direita da unidade tantos zeros quantas são as unidades do expoente:

$$10^1 = 10$$
$$10^2 = 100$$
$$10^3 = 1\,000$$

3. Quadrado. Cubo. A segunda potência chama-se também *quadrado* porque a área do quadrado obtém-se, elevando a medida do lado à segunda potência.

A terceira potência chama-se também *cubo* porque o volume do cubo se obtém, elevando à terceira potência a medida de sua aresta.

4. Operações com potências. De um modo geral, para efetuar qualquer operação entre potências, calcula-se primeiro o valor das potências.

Exemplos: 1.º) $3^2 + 2^3 = 9 + 8 = 17$
2.º) $2^2 \times 3^3 = 4 \times 27 = 108$
3.º) $5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$

Todavia, em certos casos, o resultado pode ser escrito em forma de potência indicada, o que é mais cômodo, principalmente quando se opera com expoentes elevados. A seguir estão especificados todos êstes casos.

5. Multiplicação de potências da mesma base. Seja multiplicar 2^2 por 2^4.

Por definição, temos: $2^2 \times 2^4 = \underbrace{2 \times 2}_{\text{2 fatôres}} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{4 fatôres}}$

logo, o produto terá 2 + 4 ou 6 fatôres, isto é,

$$2^2 \times 2^4 = 2^{2+4} = 2^6$$

Conclui-se:

> **Para multiplicar potências da mesma base, somam-se os expoentes e conserva-se a base.**

Exemplos: 1.º) $3^2 \times 3^3 \times 3^4 = 3^{2+3+4} = 3^9$
2.º) $7^3 \times 7^4 = 7^7$

6. Divisão de potências da mesma base. Seja dividir 3^5 por 3^3.

De acôrdo com a definição de divisão, o quociente multiplicado pelo divisor 3^3 dará o dividendo 3^5; logo, em virtude da regra de multiplicação, deve ser uma potência da mesma base, cujo expoente será o número que, somado a 3, dá 5; êste número é a diferença 5 – 3. Assim:

$$3^5 : 3^3 = 3^{5-3} = 3^2$$

Conclui-se:

> **Para dividir potências da mesma base, conserva-se a base e subtrai-se o expoente do divisor do expoente do dividendo.**

Exemplos: 1.º) $3^7 : 3^4 = 3^{7-4} = 3^3$
2.º) $5^4 : 5^3 = 5$

7. Multiplicação de potências do mesmo grau. Seja multiplicar 2^3 por 5^3.

Por definição de potência, temos:

$$2^3 \times 5^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$$
$$= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \text{ (propriedade comutativa)}$$
$$= (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \text{ (propriedade associativa)}$$
$$= (2 \times 5)^3$$

Conclui-se:

Para multiplicar potências semelhantes, multiplicam-se as bases e conserva-se o expoente.

Exemplos: $3^4 \times 5^4 = 15^4$
$8^2 \times 4^2 = 32^2$

8. Divisão de potências do mesmo grau. Seja dividir 8^3 por 2^3.

Da propriedade anterior, resulta:

$$2^3 \times 4^3 = 8^3$$

Logo, temos:

$$8^3 : 2^3 = 4^3,$$

concluindo-se:

Para dividir potências semelhantes, dividem-se as bases e conserva-se o expoente.

Exemplo: $6^3 : 2^3 = 3^3$

9. Potenciação de uma potência. Por definição de potência e de acôrdo com a regra da multiplicação, temos:

$$(7^2)^3 = 7^2 \times 7^2 \times 7^2 = 7^{2+2+2} = 7^{2\times3}$$

Conclui-se:

Para elevar uma potência a outra potência multiplicam-se os expoentes.

Exemplos: 1.º) $(2^2)^5 = 2^{10}$ 2.º) $(3^3)^4 = 3^{12}$

Observação. O uso dos parênteses é obrigatório quando a base é uma potência; assim:

$$(2^3)^2 = 2^6 = 64;$$

enquanto que, sem o parênteses, quem fica afetado à potência é o expoente, tendo-se:

$$2^{3^2} = 2^9 = 512.$$

Fica, então, esclarecido que

$$2^{3^2} \text{ eqüivale a } 2^{(3^2)}.$$

10. Potenciação de um produto. Por definição de potência podemos escrever:

$$(3 \times 2 \times 5)^3 = (3 \times 2 \times 5)(3 \times 2 \times 5)(3 \times 2 \times 5)$$
$$= 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$$
$$= 3^3 \times 2^3 \times 5^3$$

Conclui-se:

Para elevar um produto a uma potência, eleva-se cada fator a essa potência.

Exemplos: 1.º) $(2 \times 5)^2 = 2^2 \times 5^2$
2.º) $(2^3 \times 3^2)^3 = 2^9 \times 3^6$

Conseqüências.

1.ª) Tôda potência de 10 é um produto de potências, do mesmo grau, dos fatôres 2 e 5.

Com efeito, $10 = 2 \times 5$, portanto, $10^3 = (2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$.

Exemplos: 1.º) $10^4 = 2^4 \times 5^4$
2.º) $10^2 = 2^2 \times 5^2$

2.ª) Para elevar a uma potência um número terminado em zeros, faz-se abstração dos zeros da terminação, eleva-se a essa potência o número resultante, e, à direita do resultado,

escreve-se um número de zeros igual ao produto do número de zeros da base pelo expoente da potência.

Exemplos: 1.º) $20^3 = (2 \times 10)^3 = 2^3 \times 10^3 = 8\,000$
2.º) $300^2 = 90\,000$

11. Expoente zero. Quando o dividendo é igual ao divisor, o quociente é a unidade. Assim:

$$7^8 : 7^8 = 1$$

Por outro lado, se aplicarmos a regra da divisão de potências da mesma base, concluiremos:

$$7^8 : 7^8 = 7^{8-8} = 7^0$$

Dêsse modo, embora o expoente zero não tenha significação concreta, somos levados a estabelecer a convenção:

$$7^0 = 1,$$

isto é:

Qualquer quantidade diferente de zero, elevada ao expoente zero, é igual à unidade.

Exemplos: $15^0 = 1$, $1\,037^0 = 1$

12. Expoente negativo. Suponhamos a divisão de 7^3 por 7^5, onde o expoente do dividendo é menor que o expoente do divisor. Podemos escrever:

$$7^3 : 7^5 = \frac{7^3}{7^5} = \frac{7 \times 7 \times 7}{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7} = \frac{1}{7^2}$$

Por outro lado, se aplicarmos a regra da divisão de potências da mesma base, concluiremos:

$$7^3 : 7^5 = 7^{3-5} = 7^{-2}$$

Somos, então, levados a estabelecer a convenção:

$$7^{-2} = \frac{1}{7^2},$$

isto é:

Qualquer número diferente de zero, elevado a um expoente negativo, é igual ao inverso do mesmo número, com expoente positivo.

Exemplo: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

13. Potência dos números fracionários.

a) Frações ordinárias. Seja calcular o cubo de $\frac{3}{5}$:

Por definição de potência, temos:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5}$$

ou

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3}.$$

Conclui-se:

Para elevar uma fração a uma potência, elevam-se os dois têrmos a essa potência.

Exemplos:

1.º) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

2.º) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$.

b) Números mistos. Transformam-se prèviamente os números mistos em frações impróprias.

Exemplo: $\left(3\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$

14. Potência dos números decimais. Seja determinar o cubo de 1,1. Por definição de potência, temos:

$$1{,}1^3 = 1{,}1 \times 1{,}1 \times 1{,}1 = 1{,}331$$

Observa-se que o número de ordens decimais da potência é o triplo do correspondente no número dado. De um modo geral, o número de algarismos decimais da potência é igual ao produto do número de algarismos decimais da base pelo grau de potência. Assim, efetua-se a potenciação, desprezando a vírgula, elevando à potência o número inteiro obtido, e colocando-se a vírgula no resultado de acôrdo com a observação acima.

Exemplos:
1.º) $2{,}3^2 = 5{,}29$
2.º) $0{,}2^4 = 0{,}001\,6$
3.º) $0{,}5^3 = 0{,}125$

15. Expressões. Quando numa expressão interferem potências, estas devem ser efetuadas antes das demais operações. Observamos, no entanto, que devem ser obtidos, em primeiro lugar, os valôres contidos nos sinais de reunião ( ), [ ], e { }, se os houver.

Exemplo: Calcular o valor da expressão:

$$5^2 + 2^3 \times 5 - [3^2 - (3 \times 2)^2 : 12]^2 =$$
$$= 25 + 8 \times 5 - (9 - 36 : 12)^2 = 25 + 40 - (9 - 3)^2 =$$
$$= 25 + 40 - 6^2 = 65 - 36 = 29$$

EXERCÍCIOS

Efetuar as operações:

1. $2^6 + 8^2$ 2. $4^4 - 3^3$ 3. 3×5^2 4. $5 \times 2^7 - 3 \times 5^3$

5. $\dfrac{4^5 - 8^3}{8^2 - 2^5}$ 6. $2^3 \times 5^2$ 7. $2^4 \times 2^3 : 2^7$ 8. $(2 \times 3)^6 : (6^2)^3$

Indicar com forma de potência os resultados das operações:

9. $5^3 \times 5^8$ 10. $7^2 \times 7^3 \times 7^4$ 11. $27^9 : 27^4$ 12. $8^{15} : 8^4 : 8^3$

13. $2 \times 2^5 : 2^2$ 14. $14^2 : 14$ 15. $(3^4)^3$ 16. $(2^5)^8$

17. 2^{3^2} 18. $3^{(2^3)}$ 19. 5^{4^3} 20. $5^0 + 7^0$

Efetuar as operações, indicando os resultados por potências:

21. $(2^3 \times 3^2 \times 5)^3$
22. $5^3 \times 4^3$
23. $100^2 : 25^2$
24. $5^4 \times 7^4 \times 10^4$
25. $8^5 \times (2 \times 4)^3$
26. $2^2 \times 2^3 \times 5^5$
27. $(20^3 \times 20^5) : (4^7 \times 5^7)$
28. $(2^3)^4 \times (3^2)^6$
29. $(12^6 : 4^6) : (3^8 -: 3^5)$
30. $(20^2)^3 : (4^3)^2$

Respostas:

1. 128	7. 1	13. 2^4	19. 5^{64}	25. 8^8
2. 229	8. 1	14. 14	20. 2	26. 10^5
3. 75	9. 5^{11}	15. 3^{12}	21. $2^9 \times 3^6 \times 5^3$	27. 20
4. 265	10. 7^9	16. 2^{40}	22. 20^3	28. 6^{12}
5. 16	11. 27^5	17. 2^9	23. 4^2	29. 3^3
6. 200	12. 8^8	18. 3^8	24. 350^4	30. 5^6

Efetuar as operações indicadas, de modo que, no resultado, figure cada base uma única vez:

31. $2^3 \times 3^2 \times 2^5 \times 3$ *Resp.:* $2^8 \times 3^3$
32. $2^8 : 2^2 : 2^3$ *Resp.:* 2^3
33. $(3^4 \times 5^5) : 5^3$ *Resp.:* $3^4 \times 5^2$
34. $(2^5 \times 3^4) : (2^2 \times 3^3)$ *Resp.:* $2^3 \times 3$
35. $(2^4 \times 3^3 \times 5)^2 : (2^6 \times 3^3)$ *Resp.:* $2^2 \times 3^3 \times 5^2$
36. $2^3 \times (5^7)^2 \times 2^{2^3}$ *Resp.:* $2^{11} \times 5^{14}$
37. $(3 \times 2 \times 5)^3 \times (2^2 \times 3 \times 7)^2 : (2^6 \times 5^2 \times 7)$ *Resp.:* $2 \times 3^5 \times 5 \times 7$

Calcular o valor das expressões:

38. $2^3 \times 5 + [3^2 - 2^3 + (3 \times 2)^4 : 48]$ *Resp.:* 68
39. $\dfrac{3^2 \times 5^3}{(3 \times 5)^2} + \dfrac{(2 \times 3)^3}{3^2}$ *Resp.:* 29
40. $25 - \left(3 \times 7 - \dfrac{2^2 \times 3^2}{5^2 - 2^4}\right)$ *Resp.:* 8
41. $\{[(2 + 4)^2 + 3]^2 : 9 - 9\} : 10$ *Resp.:* 16
42. $100^2 : 25^2 + (20^3 \times 20^5) : (4^7 \times 5^7)$ *Resp.:* 36
43. $[(7 + 3) \times 2^2 + (10 - 8)^6 - (15 : 5 + 3 \times 7)]^2$ *Resp.:* 6 400

44. $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 2\frac{2}{5} + \frac{3}{8}$ *Resp.:* $\frac{77}{120}$

45. $\dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{11}{225} : \frac{7}{25}} - \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{5 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}$ *Resp.:* $\frac{6}{11}$

46. $0{,}(3)^2 \times \frac{7}{25} : (1{,}36 - 1{,}311\ldots)$ *Resp.:* $\frac{7}{11}$

47. Transformar numa potência de base 15, o produto: $3 \times 5 \times 25 \times 3^2$.
Resp.: 15^3

48. Transformar numa potência de base 6, o produto: $8 \times 3 \times 12 \times 27$.
Resp.: 6^5

Calcular o valor de:

49. 2^{-3} 50. 3^{-2} 51. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$ 52. $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-3}$

53. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$ 54. $\frac{1}{2^{-6}}$ 55. $(5^0)^{-4}$ 56. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$

57. $4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ 58. $5^{-2} \times (0{,}1)^{-3}$ 59. 8×4^{-2} 60. $25^{-1} \times (0{,}2)^{-3}$

61. Escreva $\frac{1}{8}$ como potência de expoente negativo de base 2.

62. Escreva 0,01 como potência de expoente negativo de base 10.

63. Escreva 10^{-3} com a forma de número decimal.

Calcule:

64. $1^{50} + \dfrac{1}{3^{-1} + 2^{-2}} + \dfrac{1}{2^{-3}}$ *Resp.:* $10\frac{5}{7}$

65. $3^{-2} \times 3^{-3} \times 3^7 \times 3^{-4}$ *Resp.:* $\frac{1}{9}$

66. $\left[(2 \times 3)^{-1}\right]^{-3}$ *Resp.:* 216

67. $\dfrac{2^{-2} \times 3^2 \times 5^2}{2 \times 3 \times 5^{-1}}$ *Resp.:* $46\frac{7}{8}$

68. $\dfrac{3^{-1} + 3^{-2}}{2^{-2} - 2^{-3}}$ *Resp.:* $3\frac{5}{9}$

69. $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \times 4^{-1}\right]^2$ *Resp.:* $\frac{1}{4}$

70. $\dfrac{2^{-1} + 3^{-1}}{5^{-1}} - 7^0 + 3 \times 2^{-1}$ *Resp.:* $4\frac{2}{3}$

71. $(2^{-1} + 2^{-2} - 3^{-1})^{-2}$ *Resp.:* $5\frac{19}{25}$

72. $\left[4 \times (-2)^{-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-3}$ *Resp.:* -8

73. $(2^{-1} + 2^{-2})\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]$ *Resp.:* 1,5

74. $\left[1\frac{2}{25}\left(1\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}$ *Resp.:* $1\frac{1}{3}$

75. $\left[5^{-2} \times \frac{5}{3} - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{15}\right)\right]^{-2}$ *Resp.:* 25

II — QUADRADO

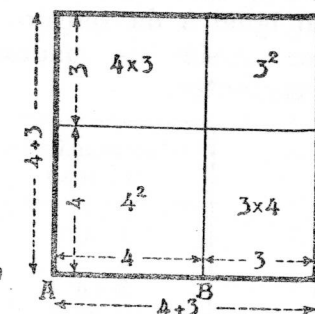
16. Quadrado da soma indicada de dois números. Consideremos o segmento AC, formado pela adição dos segmentos AB e BC (fig. 1), cujas medidas com a unidade U são, respectivamente, 4 e 3, isto é:

$$AC = AB + BC = 4 + 3$$

Formemos o quadrado de lado AC, como mostra a fig. 1, e observemos que o mesmo é formado pela soma de dois quadrados desiguais e dois retângulos iguais de dimensões 4 e 3. Logo, temos:

$$(4+3)^2 = 4^2 + 2 \times (4 \times 3) + 3^2$$

Fig. 1

e podemos concluir:

> **O quadrado da soma de dois números é igual ao quadrado do primeiro, mais o dôbro do produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.**

Exemplos:

$(7 + 8)^2 = 7^2 + 2(7 \times 8) + 8^2 = 49 + 112 + 64 = 225$

$(30 + 1)^2 = 30^2 + 2 \times 30 + 1 = 961$

$(30 + 7)^2 = 30^2 + 2 \times 30 \times 7 + 7^2 = 900 + 420 + 49 = 1\,369$

Podemos, então, obter o quadrado de um número inteiro qualquer, decompondo-o na soma da totalidade das dezenas com o algarismo das unidades, e aplicando a regra do quadrado da soma de dois números.

Exemplos:

$43^2 = (40+3)^2 = 40^2+2\times40\times3+3^2 = 1\,600+240+9 = 1\,849$

$72^2 = (70+2)^2 = 70^2+2\times70\times2+2^2 = 4\,900+280+4 = 5\,184$

Assim,

O quadrado de um número é igual ao quadrado das dezenas, mais o duplo produto das dezenas pelas unidades, mais o quadrado das unidades.

APLICAÇÃO. Das três parcelas, cuja soma é o quadrado do número, duas terminam por zero; logo, a soma tem terminação igual à da terceira parcela, que é o quadrado das unidades. Assim, os quadrados dos números têm as terminações seguintes:

TERMINAÇÃO DO NÚMERO	TERMINAÇÃO DO QUADRADO
1 ou 9	1
2 ou 8	4
3 ou 7	9
4 ou 6	6
5	5
0	00

17. Reconhecer se um número dado é quadrado.

1.º) Terminando o quadrado de um número qualquer, forçosamente, por um dos algarismos 1, 4, 5, 6, 9 ou por um número par de zeros, concluímos: *não são quadrados os números que terminarem por 2, 3, 7, 8 ou por número ímpar de zeros.*

No caso de ser 5 o algarismo das unidades, podemos ainda afirmar que o número não é quadrado, se o algarismo das dezenas fôr diferente de 2.

2.º) Não estando o número nos casos considerados, recorremos à sua decomposição em fatôres primos; isto porque, sendo um número quadrado de outro, seus fatôres primos têm expoentes pares como verificamos nos exemplos:

$12 = 2^2 \times 3$ e $12^2 = (2^2 \times 3)^2 = 2^4 \times 3^2$

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$ e $90^2 = 2^2 \times 3^4 \times 5^2$

Concluímos:

Não é quadrado o número em cuja decomposição figure pelo menos um fator primo com expoente ímpar.

Exemplos:

1.º) O número 327 não é quadrado porque termina em 7.

2.º) Verificar se 576 é quadrado; no caso afirmativo dizer de que número.

Temos: $576 = 2^6 \times 3^2$

Concluímos: 576 é quadrado de $2^3 \times 3$ ou 24.

3.º) Verificar se 224 é quadrado; no caso afirmativo dizer de que número.

Temos: $224 = 2^5 \times 7$

Concluímos: 224 não é quadrado.

18. Diferença entre os quadrados de dois números inteiros e consecutivos.

Consideremos, por exemplo, o quadrado de 51 ou 50 + 1:

$$51^2 = (50 + 1)^2$$

Calculando o quadrado do segundo membro pela regra do número 16, vem:

$$51^2 = 50^2 + 2 \times 50 + 1$$

logo, temos: $51^2 - 50^2 = 2 \times 50 + 1$

Conclui-se:

A diferença entre os quadrados de dois números inteiros e consecutivos é igual ao dôbro do menor, mais um.

Exemplo: *A diferença entre os quadrados de dois números inteiros e consecutivos é 103. Achar os dois números.*

A diferença entre os quadrados é igual ao dôbro do menor mais um. Logo, o dôbro do menor será:

$$103 - 1 = 102$$

O número menor é: $102 : 2 = 51$

e o maior: $51 + 1 = 52$

19. Produto da soma indicada pela diferença indicada de dois números.

O produto da soma indicada pela diferença indicada de dois números é igual à diferença de seus quadrados.

Dizemos por exemplo, que:

$$(5 + 3)\ (5 - 3) = 5^2 - 3^2$$

Realmente, aplicando a propriedade distributiva e considerando a diferença como um todo, teremos:

$$(5 + 3)\ (5 - 3) = 5 \times (5 - 3) + 3 \times (5 - 3)$$

Aplicando, novamente, a propriedade distributiva em relação à subtração, virá:

$$(5 + 3)\ (5 - 3) = 5^2 - \cancel{5} \times \cancel{3} + \cancel{5} \times \cancel{3} - 3^2 = 5^2 - 3^2$$

pois os produtos iguais e de sinais contrários anulam-se.

Na figura 2 fica esclarecido que do quadrado de lado 5 ou 5^2 tirando o quadrado assinalado na parte inferior esquerda, de lado 3, ou 3^2, obtém-se a soma dos retângulos $5\ (5 - 3)$ e $3\ (5 - 3)$ ou, o que é o mesmo $(5 + 3)\ (5 - 3)$; concluindo-se:

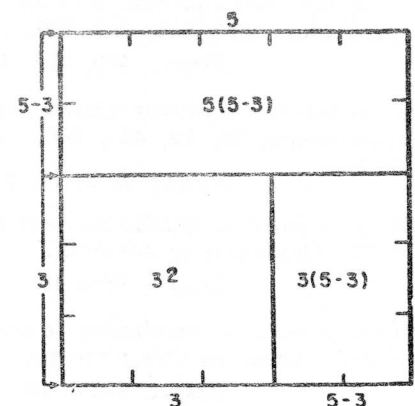
$$(5 + 3)\ (5 - 3) = 5^2 - 3^2$$

Fig. 2

Exemplos:

1.º) $(7+4)(7-4) = 49 - 16 = 33$

2.º) $(8+5)(8-5) = 64 - 25 = 39$

3.º) A soma de dois números é 30. A diferença entre seus quadrados é 120. Achar os dois números.

Resolução. Em virtude da propriedade, dividindo a diferença entre os quadrados pela soma, obteremos a diferença entre os dois números, que será:

$$120 : 30 = 4$$

O dôbro do número menor é: $30 - 4 = 26$

O número menor é: $26 : 2 = 13$

E o número maior: $30 - 13 = 17$

EXERCÍCIOS

1. Aplicar a regra do quadrado da soma aos seguintes exemplos: $9 + 6$, $30 + 4$, $11 + 3$, $7 + 10$, $12 + 8$.
2. Obter mentalmente o quadrado dos seguintes números, decompondo-os na soma das dezenas com as unidades: 31, 25, 82, 95, 93, 115.
3. Sem efetuar a decomposição em fatôres primos, dizer quais dos seguintes números não são quadrados: 375, 360, 400, 341, 1 237, 528, 6 234, 2 735, 3 025, 2 842, 7 523.

   Resp.: 375, 360, 1 237, 528, 2 735, 2 842, 7 523

4. Verificar, pela decomposição em fatôres, quais dos seguintes números são quadrados: 400, 225, 425, 200, 441, 116, 216, 4 225.
   Resp.: 400, 225, 441, 4 225.

5. Achar os menores números inteiros pelos quais se devem multiplicar, respectivamente, 18, 72, 425, 200, 116 e 216, para obter produtos quadrados.
   Resp.: 2, 2, 17, 2, 29, 6

6. A diferença entre os quadrados de dois números inteiros e consecutivos é 37. Quais são os números?
   Resp.: 18 e 19

7. A diferença entre os quadrados de dois números inteiros e consecutivos é 247. Achar os dois números.
   Resp.: 123 e 124.

8. Achar o número que se deve somar ao quadrado de 45 para obter o quadrado de 46, sem elevá-los ao quadrado.
   Resp.: 91

9. Sem elevar ao quadrado, calcular o número que se deve subtrair do quadrado de 105 para obter o quadrado de 104.
   Resp.: 209

10. Qual o menor número inteiro pelo qual devemos multiplicar o produto $2^3 \times 35 \times 20$, a fim de obter um quadrado?
    Resp.: 14

11. A diferença entre os quadrados de dois números é 104. A soma dos mesmos números é 26. Achar os dois números.
    Resp.: 11 e 15.

12. A diferença entre os quadrados de dois números é 176. A diferença dos mesmos números é 4. Achar os dois números.
    Resp.: 20 e 24.

13. Calcular o produto da soma pela diferença dos números 104 e 200, elevando-os ao quadrado.
    Resp.: 29 184

14. Achar a diferença entre os quadrados de 27 e 23, sem elevá-los ao quadrado.
    Resp.: $50 \times 4 = 200$

15. A soma de dois números é 144. A diferença entre os quadrados dos mesmos números é 8 064. Achar os dois números.
    Resp.: 44 e 100

III — RAIZ QUADRADA

20. Raiz quadrada exata. ***Raiz quadrada exata*** *de um número é outro número, cujo quadrado é igual ao primeiro.*

Assim, 7 é a raiz quadrada exata de 49 porque

$$7^2 = 49$$

A operação pela qual calculamos a raiz quadrada denomina-se ***extração da raiz quadrada*** e indica-se com o símbolo $\sqrt{\ }$, chamado ***radical.*** Para a raiz quadrada de 64, por exemplo, indicaremos:

$$\sqrt{64} = 8$$

O número 64, cuja raiz se quer extrair denomina-se ***radicando.***

Exemplos: $\sqrt{25} = 5$, porque $5^2 = 25$

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}, \text{ porque } \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\sqrt{0{,}09} = 0{,}3, \text{ porque } (0{,}3)^2 = 0{,}09$$

Observemos que um número só terá raiz quadrada exata, se fôr quadrado ou, como também se diz, se fôr ***quadrado perfeito.*** O número 42, por exemplo, não tem raiz quadrada exata.

21. Raiz quadrada a menos de uma unidade. Consideremos, por exemplo, o número 42. O quadrado de 6 é 36; logo, o número cujo quadrado é 42, é maior que 6; do mesmo modo concluímos que êsse número é menor que 7, porque o quadrado de 7 é 49.

Assim, temos: $36 < 42 < 49$

e $6 < \sqrt{42} < 7$

A raiz de 42 fica, pois, compreendida entre 6 e 7; a diferença entre ela e um qualquer dêstes números é menor que 1.

Se considerarmos, como raiz de 42, um dos números 6 ou 7, cometeremos um êrro menor que 1; para menos se considerarmos 6, e para mais, se considerarmos 7. Diremos, então:

6 é a raiz de 42, a menos de 1, por falta;
7 é a raiz de 42, a menos de 1, por excesso.

Considera-se, comumente, a raiz por falta. Daí, a definição:

Raiz quadrada a menos de uma unidade de um número dado é o *maior número inteiro*, cujo quadrado fica contido no número dado.

Quando o número não é quadrado perfeito, a extração da raiz consiste em achar a raiz a menos de uma unidade.

Exemplos:

1.º) O maior número inteiro, cujo quadrado fica contido em 93 é 9, logo:

$\sqrt{93} = 9$, a menos de uma unidade.

2.º) O maior inteiro, cujo quadrado fica contido em 10,43 é 3. Logo, a raiz quadrada de 10,43 a menos de uma unidade é 3:

$\sqrt{10{,}43} = 3$, a menos de uma unidade.

3.º) Anàlogamente, temos:

$\sqrt{27\frac{2}{3}} = 5$, a menos de uma unidade.

Observemos que a raiz a menos de uma unidade de um *número fracionário*, é a mesma que a de sua parte inteira.

22. Resto da raiz quadrada. ***Resto*** duma raiz quadrada é a diferença entre o número e o quadrado de sua raiz quadrada.

A raiz quadrada de 34 a menos de uma unidade é 5 e o resto 6:

$$34 - 25 = 9$$

23. Limite do resto. Se somarmos uma unidade ao número 34, do último exemplo, o resto aumentará uma unidade:

$$35 - 5^2 = 10,$$

e ficará igual ao dôbro da raiz: $10 = 2 \times 5$.

Somando mais uma unidade, obteremos o número 36, cuja raiz já é 6. Isso acontecerá sempre que o resto atingir o dôbro da raiz, porque, sendo a diferença entre os quadrados de dois números inteiros e consecutivos igual ao dôbro do menor mais um, quando acrescentamos a unidade, obtemos o quadrado do número seguinte.

Podemos, então, concluir:

O resto da raiz quadrada não pode exceder o dôbro da raiz.

24 Extração da raiz quadrada dos números inteiros. A regra prática para extração da raiz quadrada dos números inteiros compreende dois casos.

Primeiro caso: ***O número dado é menor que 100.***

Neste caso a raiz procurada é menor que 10 e obtém-se imediatamente por intermédio da tabela de quadrados dos nove primeiros números inteiros:

Números:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrados:	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

É necessário reter de memória esta tabela de quadrados.

Exemplos: $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{81} = 9$; $\sqrt{64} = 8$; $\sqrt{9} = 3$

$\sqrt{54} = 7$, a menos de uma unidade.

Segundo caso: ***O número dado é maior que cem.***

Primeiro exemplo: *Extrair a raiz quadrada de* 1 296.

REGRA:

a) Divide-se o número em classes de dois algarismos, a partir da direita. A última classe pode ter um algarismo.

12 . 96

b) Extrai-se a raiz da 1.ª classe (12), a menos de uma unidade, e encontra-se o 1.º algarismo da raiz:

```
12 96 | 3
      |------
```

c) Da classe considerada subtrai-se o quadrado da raiz, baixa-se a classe seguinte e separa-se o algarismo das unidades por um ponto:

```
12 96 | 3
 9    |------
----  |
 39.6 |
```

d) Dividem-se as dezenas à esquerda do ponto pelo dôbro da raiz, o que fornece o segundo algarismo da raiz:

```
12 96 | 3
 9    |39 : 6 = 6
----  |
 39.6 |
```

e) Escreve-se o quociente obtido à direita do dôbro da raiz e multiplica-se o número assim formado pelo próprio quociente; o produto resultante subtrai-se do 1.º resto:

```
12 96 | 36
 9    |------------
----  | 39 : 6 = 6
 39.6 | 66 × 6 = 396
 39 6 |
----- |
    0 |
```

Resp.: a raiz quadrada de 1 296 é 36, exata.

Segundo exemplo: *Extrair a raiz quadrada de* 56 231.

a) Dividindo em classes (a última classe tem um algarismo):

5.62.31

b) A raiz a menos de 1 da primeira classe é 2, cujo quadrado é 4:

```
5.62.31 | 2
4       |------
-----   |
 16.2   |
```

c) Dividindo a parte à esquerda do ponto pelo dôbro da raiz (16 : 4), encontramos 4; mas, se multiplicarmos 44 por 4, encontraremos o número 176, maior que o resto 162. O algarismo seguinte da raiz é, pois, 3; e temos:

```
5.62.31 | 23
4       |--------------
-----   | 16 : 4 = 4
 16.2   | 44 × 4 = 176
 12 9   | 43 × 3 = 129
-----   |--------------
   33   |
```

d) Abaixando a classe seguinte e, dividindo as dezenas do número formado pelo dôbro da raiz, temos:

```
5.62.31 | 237
4       |--------------
-----   | 16 : 4 = 4
 16.2   | 44 × 4 = 176
 12 9   | 43 × 3 = 129
-----   |--------------
 333.1  | 333 : 46 = 7 (quoc. inteiro)
```

e) Escrevendo o quociente obtido (7) à direita do dôbro da raiz (46), multiplicando o número formado (467) pelo próprio quociente (7) e subtraindo o produto do 2.º resto:

```
                  5 62 31 | 237
                  4       |--------------
                  -----   | 16 : 4 = 4
1.º resto.....     16.2   | 44 × 4 = 176
                   12 9   | 43 × 3 = 129
                  ------  |--------------
2.º resto.....     333.1  | 333 : 46 = 7
                   326 9  | 467 × 7 = 3 269
                  ------  |
resto da raiz....    6 2  |
```

Resp.: A raiz quadrada de 56 231, a menos de uma unidade, é 237 e o resto é 62.

Terceiro exemplo: *Extrair a raiz quadrada de* 92 416. Aplicando a mesma regra, temos:

```
 9.24.16 | 3
 9       |------
 ----    | 6
 02.4    |
```

Como o quociente inteiro da divisão de 2 por 6 é zero, escreve-se zero na raiz, baixa-se a classe seguinte e segue-se na aplicação da regra:

```
 9. 24.16 | 304
 9        |-------------
 ---------| 241 : 60=4
 0 241. 6 | 604 × 4=2416
   241  6 |
 ---------|
     0    |
```

A raiz exata é 304.

25. Prova. Verifica-se, em primeiro lugar, se o resto é menor ou igual ao dôbro da raiz. Esta condição preenchida, a prova consistirá em elevar a raiz encontrada ao quadrado e somar o resto; o resultado deve ser o número dado.

26. Cálculo de uma raiz por decomposição em fatôres. Se o número dado é quadrado, pode-se obter a raiz quadrada decompondo-o em fatôres primos, e dividindo por 2 os expoentes dos mesmos fatôres.

Exemplos:

1.º) $144 = 2^4 \times 3^2$, logo $\sqrt{144} = 2^2 \times 3 = 12$

2.º) $\sqrt{441} = \sqrt{3^2 \times 7^2} = 3 \times 7 = 21$

27. Aproximação decimal no cálculo da raiz quadrada. Na extração da raiz quadrada dos números inteiros a menos de uma unidade verificamos que a cada classe de ***dois algarismos*** corresponde *um algarismo* na raiz. Assim, dado um número que não seja quadrado perfeito, por exemplo, o número 23, se continuarmos a operação, acrescentando para isso uma classe de zeros, o que corresponde a escrever o número 23 com a forma

23,00

obteremos um nôvo algarismo na raiz, que será de *décimos*. Teremos, dêsse modo, a raiz a menos de um décimo:

```
 23,00 | 4,7
 16    |--------------
 ----- | 70 : 8 = 8
  70.0 | 88 × 8 = 704
  60 9 | 87 × 7 = 609
  ---- |
   9 1 |
```

A raiz de 23 a menos de um décimo é 4,7 e o resto 0,91.

Anàlogamente obteríamos a raiz a menos de um centésimo, acrescentando duas classes de zeros, e assim por diante. Podemos, então, obter a raiz aproximada acrescentando zeros à direita de modo que o número dado fique com o dôbro de casas decimais da aproximação pedida.

Exemplo: *Extrair a raiz quadrada de* 2, *a menos de* 0,01.

Extraímos a raiz do número 2,000 0 ou de 20 000 e separamos duas casas decimais no resultado. Obteremos:

```
 2.00.00 | 141
 1       |---------------------------
 ------- | 10 : 2 = 5     | 40 : 28 = 1
 10.0    | 25 × 5 = 125   |281 ×  1 = 281
  9 6    | 24 × 4 = 96    |
 ------- |                |
   40.0  |
   28 1  |
 ------- |
   11 9  |
```

A raiz de 2 é 1,41, a menos de 0,01 e o resto é 0,0119.

28. Raiz quadrada dos números decimais. Para extrair a raiz quadrada de um número decimal procede-se como para os números inteiros.

Assim, para obter a raiz a menos de uma unidade, extrai-se a raiz da parte inteira. A raiz a menos de um décimo será obtida tomando-se *duas ordens decimais*. Para a raiz a menos de um centésimo, consideram-se quatro ordens decimais, e assim por diante. Quando necessário, com-

pletam-se com zeros as ordens decimais, de acôrdo com a aproximação desejada.

Exemplos:

1.º) *Extrair a raiz quadrada de 0,409 6 a menos de 0,01.*

A aproximação exigida será obtida considerando-se 4 casas decimais, que são as dadas. Temos, então:

40.96	64
36	124
49.6	4
49 6	496
0	

Conclui-se: $\sqrt{0,4096} = 0,64$

2.º) *Extrair a raiz quadrada de 5,713, a menos de 0,01.*

São necessárias 4 ordens decimais. Completamos com um zero e extraímos a raiz do número 5,713 0.

Obteremos:

5.71.30	239	
4	44	469
17.1	×4	9
12 9	176	4 221
4 23.0	43	
4 22 1	3	
9	129	

Conclui-se:

$\sqrt{5,713} = 2,39$ a menos de 0,01. O resto é 0,000 9.

3.º) *Extrair a raiz quadrada de 0,003 588 7, a menos de 0,01.*

Como a aproximação pedida exije, apenas, 4 ordens, abandonamos as demais e extraímos a raiz de 0,003 5. Temos. pois:

$$\sqrt{0,003\,588\,7} = 0,05 \text{ a menos de } 0,01.$$

29. Raiz quadrada das frações.

Primeiro caso: ***Os dois têrmos são quadrados.***

Extrai-se a raiz quadrada de seus dois têrmos.

Exemplos:

1.º) $\sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \frac{5}{7}$

2.º) $\sqrt{\frac{169}{225}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{225}} = \frac{13}{15}$

3.º) $\sqrt{\frac{18}{32}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$

Neste caso a raiz é *exata.*

Segundo caso: ***Sòmente o denominador é quadrado.***

Seja extrair a raiz quadrada de $\frac{7}{25}$

A fração dada fica compreendida entre $\frac{4}{25}$ e $\frac{9}{25}$; logo, sua raiz quadrada ficará compreendida entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{5}$, isto é,

$$\frac{2}{5} < \sqrt{\frac{7}{25}} < \frac{3}{5}$$

e, portanto, a raiz quadrada de $\frac{7}{25}$ diferirá de cada uma dessas frações de menos de $\frac{1}{5}$.

Assim, a raiz pedida é $\frac{2}{5}$ por falta e $\frac{3}{5}$ por excesso, a menos de $\frac{1}{5}$, ou com êrro menor que $\frac{1}{5}$.

Exemplos:

1.º) $\sqrt{\dfrac{33}{49}} = \dfrac{5}{7}$ a menos de $\dfrac{1}{7}$

2.º) $\sqrt{\dfrac{83}{121}} = \dfrac{9}{11}$ a menos de $\dfrac{1}{11}$

3.º) $\sqrt{\dfrac{34}{98}} = \sqrt{\dfrac{17}{49}} = \dfrac{4}{7}$ a menos de $\dfrac{1}{7}$

REGRA:

> **Para extrair a raiz quadrada de uma fração, em que o denominador é quadrado, extrai-se a raiz quadrada do numerador a menos de uma unidade e a exata do denominador.**

TERCEIRO CASO: ***O denominador não é quadrado.***

Seja extrair a raiz quadrada de $\dfrac{35}{72}$.

Neste caso transformamos a fração numa equivalente, cujo denominador seja quadrado, o que reduz a pesquisa ao caso anterior. Decompondo o denominador em fatôres, temos:

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

e verificamos que, multiplicando-o por 2 (fator de expoente ímpar), obteremos um quadrado. Então a fração equivalente será $\dfrac{35 \times 2}{72 \times 2}$, ou $\dfrac{35 \times 2}{2^4 \times 3^2}$. Assim, temos:

$$\sqrt{\frac{35}{72}} = \sqrt{\frac{70}{2^4 \times 3^2}} = \frac{8}{2^2 \times 3} = \frac{8}{12} \text{ a menos de } \frac{1}{12}$$

Observamos que, quando o numerador não é quadrado, extrai-se sua raiz aproximada; e, entretanto, torna-se o denominador quadrado, quando não é. Assim se procede, a fim de obter a raiz com êrro menor que uma *unidade fracionária* determinada.

Exemplos:

1.º) $\sqrt{\dfrac{7}{12}} = \sqrt{\dfrac{7 \times 3}{12 \times 3}} = \sqrt{\dfrac{21}{36}} = \dfrac{4}{6}$ a menos de $\dfrac{1}{6}$

2.º) $\sqrt{\dfrac{5}{13}} = \sqrt{\dfrac{5 \times 13}{13^2}} = \sqrt{\dfrac{65}{13^2}} = \dfrac{8}{13}$ a menos de $\dfrac{1}{13}$

3.º) $\sqrt{\dfrac{20}{32}} = \sqrt{\dfrac{10}{16}} = \dfrac{3}{4}$ a menos de $\dfrac{1}{4}$

REGRA:

> **Para extrair a raiz quadrada de uma fração, cujo denominador não é quadrado, transforma-se numa equivalente de denominador quadrado, e aplica-se a regra do segundo caso.**

30. Raiz quadrada das frações com aproximação decimal. Reduz-se a fração a número decimal com tantas casas decimais quantas necessárias, de acôrdo com a aproximação desejada.

Exemplo: *Extrair a raiz de 5/8, a menos de* 0,01.

Devemos obter o número 5/8 com quatro casas decimais.

Convertendo em decimal, temos: $\dfrac{5}{8} = 0{,}625$ ou $0{,}625\,0$.

Extraímos, então, a raiz de 0,625 0. Obteremos:

$$\sqrt{5/8} = \sqrt{0{,}625\,0} = 0{,}79$$

EXERCÍCIOS

Achar as raízes indicadas:

1. $\sqrt{4}$
2. $\sqrt{9}$
3. $\sqrt{49}$
4. $\sqrt{16}$
5. $\sqrt{64}$
6. $\sqrt{\dfrac{16}{25}}$
7. $\sqrt{81}$
8. $\sqrt{0{,}04}$
9. $\sqrt{21 + 4}$
10. $\sqrt{4 \times 9}$

11. Extrair a raiz quadrada, a menos de uma unidade, dos números: 196; 225; 576; 34 969; 41 616; 15 229; 680 5/7; 961,73; 94 372; 76 176; 18 225.
Resp.: 14; 15; 24; 187; 204; 123; 26; 31; 307; 276; 135

12. Extrair as seguintes raízes, decompondo os números em fatôres primos:
$\sqrt{3\,969}$; $\sqrt{6\,561}$; $\sqrt{8\,281}$; $\sqrt{729}$; *Resp.:* 63; 81; 91; 27.

13. Extrair a raiz quadrada dos seguintes produtos, sem efetuá-los: 64×81; $2^4 \times 3^6$; $5^2 \times 7^2$; 169×49. *Resp.:* 72; 108; 35; 91

14. Calcular o lado de um quadrado que tem 729m² de área.
Resp.: 27m

15. Calcular o comprimento, em metros, do lado de um quadrado que tem 112,36ha de área *Resp.:* 1 060m

16. Que comprimento deve ter o lado de um quadrado para que sua área seja igual à de um retângulo que tem 28m de largura e 63m de comprimento? *Resp.:* 42m

17. No centro de uma praça, que tem 2 312 metros quadrados de área, quer-se construir um abrigo de forma quadrada ocupando $\frac{1}{8}$ de sua área. Que comprimento deve ser dado ao lado do abrigo?
Resp.: 17m

18. Qual o menor número que se deve subtrair de 8 560, para obter um quadrado? *Resp.:* 96

19. Qual o menor número que se deve somar a 3 009 para obter um quadrado? *Resp.:* 16

20. A área de um quadrado tem 1,96dam². Calcular o comprimento do lado, em metros. *Resp.:* 14m

21. Se a raiz quadrada a menos de uma unidade de um número inteiro é 27, qual o maior resto possível? *Resp.:* 54

22. A raiz quadrada de um número inteiro, a menos de uma unidade por falta, é 70 e o resto, o maior possível. Achar o número.
Resp.: 5 040

23. A raiz quadrada de um número é 17 e o resto, 15. Achar o número.
Resp.: 304

24. Achar o número, cuja raiz quadrada a menos de uma unidade por falta é 25 e o resto é 30. *Resp.:* 655

25. Achar o número, cuja raiz quadrada por falta é 9 e o resto é 4.
Resp.: 85

26. Achar o número, cuja raiz quadrada é 15 e o resto é 15.
Resp.: 240

27. Um têrço do quadrado de um número é 3 072. Achar o número.
Resp.: 9de

28. Qual o número pelo quál devemos dividir 72 923, 9 modo a obter um quociente igual ao divisor e o resto igual a 23?
Resp.: 270.

29. A soma dos quadrados de dois números inteiros é 818. Um dos números é 17. Achar o outro: *Resp.:* 23

30. Qual o menor número que se deve somar a 5 438 a fim de obter um quadrado? *Resp.:* 38

Achar a raiz quadrada, a menos de um centésimo, dos números:

31. 3 *Resp.:* 1,73 — 32. 258 *Resp.:* 16,06
33. 87 *Resp.:* 9,32 — 34. 520 *Resp.:* 22,80
35. 0,598 7 *Resp.:* 0,77 — 36. 0,022 *Resp.:* 0,14
37. 3,496 9 *Resp.:* 1,87 — 38. 7,241 *Resp.:* 2,69
39. 0,035 813 *Resp.:* 0,18 — 40. 96,04 *Resp.:* 9,80

Achar a raiz quadrada, a menos de um milésimo, dos números:

41. 5 *Resp.:* 2,236 — 42. 0,006 *Resp.:* 0,077
43. 0,002 337 *Resp.:* 0,048 — 44. 0,000 087 *Resp.:* 0,009
45. 0,000 333 *Resp.:* 0,018 — 46. $\frac{53}{72}$ *Resp.:* 0,857

Extrair a raiz quadrada das frações:

47. $\frac{64}{100}$ *Resp.:* $\frac{8}{10}$ — 48. $\frac{225}{441}$ *Resp.:* $\frac{15}{21}$
49. $\frac{228}{256}$ *Resp.:* 0,9 — 50. $\frac{1\,573}{8\,316}$ *Resp.:* 0,4
51. $\frac{625}{1\,296}$ *Resp.:* $\frac{25}{36}$ — 52. $\frac{118}{720}$ *Resp.:* 0,4

Extrair a raiz quadrada a menos de um décimo:

53. 2,89 *Resp.:* 1,7 — 54. 25,3 *Resp.:* 5,0
55. 12,96 *Resp.:* 3,6 — 56. $\frac{3}{8}$ *Resp.:* 0,6
57. $\frac{7}{13}$ *Resp.:* 0,7 — 58. $\frac{37}{90}$ *Resp.:* 0,6
59. $1\frac{2}{7}$ *Resp.:* 1,1 — 60. $\frac{5}{8}$ *Resp.:* 0,7

Calcular os valôres de:

61. $\sqrt{1+\sqrt{\frac{25}{16}}}$ *Resp.:* $\frac{3}{2}$ — 62. $\sqrt{1-\sqrt{\frac{64}{81}}}$ *Resp.:* $\frac{1}{3}$
63. $\sqrt{3 \times \sqrt{\frac{25}{81}} - \sqrt{\frac{4}{9}}}$ *Resp.:* 1 — 64. $\sqrt{30,09 - \sqrt{64}}$ *Resp.:* 4,7

65. $\sqrt{1,96} + 4,(3) \times \frac{9}{13} - \left[1,(6) - \sqrt{\frac{9}{25}}\right]$. *Resp.:* $3\frac{1}{3}$

66. $\left(\sqrt{144} + \frac{1}{3}\right) : \frac{37}{9} - \frac{3}{4}\left[0,2(6) - \sqrt{\frac{1}{25}}\right]$ *Resp.:* $2\frac{19}{20}$

67. $\sqrt{10 - 2\sqrt{4}}$, a menos de 0,01. *Resp.:* 2,44

68. Achar, em quilômetros, a largura de um terreno de forma quadrada, cuja área tem 729ha. *Resp.:* 2,7km

69. Um terreno tem 152m de comprimento e 38m de largura. Achar o lado de um terreno quadrado da mesma área. *Resp.:* 76m

70. O produto de dois números iguais é 1,51 29. Achar os números. *Resp.:* 1,23

IV — RAIZ CÚBICA

31. Raiz cúbica exata. ***Raiz cúbica*** *exata de um número é outro número, cujo cubo é igual ao primeiro.*

Assim, 2 é a raiz cúbica de 8 porque

$$2^3 = 8$$

Para indicar a raiz cúbica emprega-se a notação:

$$\sqrt[3]{8}$$

O número 8, cuja raiz cúbica se procura, chama-se *radicando*. O número 3, colocado na abertura do radical, denomina-se *índice*.

Exemplos: $\sqrt[3]{27} = 3$ porque $3^3 = 27$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3} \quad \text{porque} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

Observemos que um número só terá raiz cúbica exata, se fôr cubo ou, como também se diz, se fôr ***cubo perfeito.***

32. Raiz cúbica a menos de uma unidade. Quando um número inteiro não é cubo, fica compreendido entre os cubos de dois números inteiros e consecutivos. O número 50, por exemplo, fica compreendido entre 27 e 64, que são cubos, isto é:

$$27 < 50 < 64$$

A raiz cúbica de 50 fica, então, compreendida entre 3 e 4:

$$3 < \sqrt[3]{50} < 4$$

e a diferença entre $\sqrt[3]{50}$ e qualquer dêsses números é menor que uma unidade. Diremos, então:

3 é a raiz cúbica de 50, *a menos de uma unidade, por falta.*
4 é a raiz cúbica de 50, *a menos de uma unidade, por excesso.*

Considera-se, comumente, a raiz por falta, daí a definição:

Raiz cúbica a menos de uma unidade de um número dado é o *maior número inteiro*, cujo cubo fica contido no número dado.

A raiz cúbica a menos de uma unidade dos números menores que 1 000 obtém-se imediatamente, por intermédio da tabela de cubos dos nove primeiros números naturais:

Números:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cubos:	1	8	27	64	125	216	343	512	729 .

É necessário guardá-la de memórias.

Exemplos:

1.º) O maior número inteiro, cujo cubo fica contido em 75 é 4, logo:

$$\sqrt{75} = 4, \text{ a menos de uma unidade.}$$

2.º) O maior número inteiro, cujo cubo fica contido em 9,45 é 2, logo:

$$\sqrt[3]{9,45} = 2, \text{ a menos de uma unidade.}$$

33. Cálculo da raiz cúbica por decomposição em fatôres. Quando o número dado é cubo perfeito, pode-se obter a raiz cúbica decompondo-o em fatôres primos, e *dividindo por 3 os expoentes* dos mesmos fatôres.

Exemplo: $\sqrt[3]{1\,728} = \sqrt[3]{2^6 \times 3^3} = 2^2 \times 3 = 12$

34. Raiz cúbica dos números decimais. Na extração da raiz cúbica dos números decimais procede-se como para os números inteiros.

Exemplo. *A raiz cúbica de 0,837, obtém-se extraindo a raiz de 837 que é 9.*

Assim: $\sqrt[3]{0{,}837} = 0{,}9.$

35. Raiz cúbica das frações.

PRIMEIRO CASO: ***Os dois têrmos são cubos perfeitos.*** Neste caso extrai-se a raiz cúbica de ambos os têrmos.

Exemplo: $$\sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{4}{5}$$

Só neste caso a raiz é exata.

SEGUNDO CASO: ***Sòmente o denominador é cubo.***

Extrai-se a raiz exata do denominador e a raiz a menos de 1 do numerador.

Exemplo: $$\sqrt[3]{\frac{133}{512}} = \frac{5}{8}, \text{ a menos de } \frac{1}{8} \text{ por falta.}$$

TERCEIRO CASO: ***Nenhum dos têrmos é cubo.***

Neste caso, torna-se o denominador cubo, multiplicando-o pelos fatôres primos, cujos expoentes não são divisíveis por 3. Aplica-se, em seguida, a regra do segundo caso.

Exemplos: $$\sqrt[3]{\frac{23}{72}} = \sqrt[3]{\frac{23}{2^3 \times 3^2}} = \sqrt[3]{\frac{23 \times 3}{2^3 \times 3^3}} = \frac{4}{6}$$

36. Raiz cúbica das frações com aproximação decimal. Reduz-se a fração a número decimal com tantas casas decimais quantas necessárias, de acôrdo com a aproximação desejada.

Exemplo: *Extrair a raiz cúbica de $\frac{58}{73}$, a menos de 1 décimo.*

Devemos ter três casas decimais, de acôrdo com a aproximação pedida, logo temos:

$$\frac{58}{73} = 0{,}794$$

e concluiremos:

$$\sqrt[3]{\frac{58}{73}} = \sqrt[3]{0{,}794} = 0{,}9$$

EXERCÍCIOS

Extrair, a menos de uma unidade, as raízes cúbicas:

1. 581 2. 13,824 3. 941,192 4. 16,27
5. 138,407 6. 48,301 7. 376 8. 589

Extrair a raiz cúbica pela decomposição em fatôres primos:

9. 9 261 10. 157 464 11. 74 088

Extrair a raiz cúbica das frações:

12. $\frac{216}{343}$ 13. $\frac{27}{64}$ 14. $\frac{125}{512}$

Resolva:

15. Um quarto do cubo de um número é 6750. Achar o número.
16. A soma de dois números é 64 e o cubo da diferença é 216. Ache os números.
17. As dimensões de um paralelepípedo retângulo medem, respectivamente 0,8dm, 0,3dm e 0,9dm. Calcular, em metros, a aresta do cubo que tem o mesmo volume.
18. Um reservatório de forma cúbica pode conter 1728 litros dágua. Calcular as dimensões do reservatório, em metros.

RESPOSTAS

1. 8 2. 2 3. 9 4. 2 5. 5
6. 3 7. 7 8. 8 9. 21 10. 54
11. 42 12. $\frac{6}{7}$ 13. $\frac{3}{4}$ 14. $\frac{5}{8}$ 15. 30.
16. 35 e 29 17. 0,06m 18. 1,2m.

UNIDADE II

Cálculo literal — Polinômios

I — EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

1. **Símbolos algébricos.** As letras do alfabeto são utilizadas, de um modo geral, para representar números que podem receber valôres arbitrários ou cujo valor é ainda desconhecido. Habitualmente empregam-se as últimas letras x, y, z, para representar números incógnitos.

São também usadas letras acentuadas como a', a'', etc. ou com índices como b_1, b_2, b_3 para representar quantidades análogas. As duas bases de um trapézio podem, assim, ser representadas por b_1 e b_2 ou b' e b''; os raios de dois círculos podem ser representados por r_1 e r_2 ou R e R_1, etc.

As operações são indicadas pelos mesmos símbolos já conhecidos. Para a multiplicação usa-se também o ponto. Entre fatôres literais, bem como entre um fator numérico e outro literal, é suprimido o sinal de multiplicação; assim:

$$3ab = 3 \times a \times b$$

2. **Generalização das soluções. Fórmula.** O emprêgo das letras apresenta a vantagem de serem traduzidos de um modo geral os enunciados dos problemas e generalizadas as soluções.

Exemplos:

1.º) Um número de dois algarismos, 79, por exemplo, compõe-se de 7 dezenas e 9 unidades; assim, $79 = 7 \times 10 + 9$.

Para representar um *número qualquer* de dois algarismos podemos então escrever:

$$10 \times a + b$$

sendo a e b algarismos quaisquer de dezenas e unidades, respectivamente.

2.º) Para representar a idade de uma pessoa há cinco anos atrás, podemos representar a idade atual por X e a expressão $X - 5$ será, de um modo geral, a idade pedida.

3.º) Se um caderno custa Cr$ 2,00, o preço de 5 cadernos do mesmo tipo será Cr$ 2,00 × 5.

Obteremos uma solução geral para todos os problemas dêsse mesmo tipo, representando por c o custo de um objeto por n o número de objetos, e por C o custo total, e que seria traduzida pela fórmula:

$$C = cn$$

Esta fórmula algébrica é bem mais abreviada que a linguagem comum.

4.º) As fórmulas que obtivemos para o cálculo das áreas e volumes são exemplos de abreviação da linguagem com o emprêgo de símbolos algébricos.

3. Expressões algébricas. Damos o nome de *expressão algébrica*, a qualquer indicação de operações sôbre letras ou sôbre letras e números.

Exemplos: $a + b$, $3a$, $2ax^3$, $2x + 3y - \dfrac{x}{y}$

4. Valor numérico de uma expressão algébrica.

Valor numérico *de uma expressão algébrica* é o número relativo que se obtém, atribuindo às letras que nela figuram, valôres determinados.

Exemplos:

1.º) O valor numérico de $5abx$ para: $\begin{cases} a = -1 \\ b = +3 \\ x = -4 \end{cases}$ será:

$$5abx = 5 \times (-1) \times 3 \times (-4) = +60$$

2.º) Achar o valor numérico de

$$5x^3y + 4x^2y^2 - 5xy^3 \text{ para } \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Representando por N o valor procurado, temos:

$$N = 5 \times 2^3(-2) + 4 \times 2^2(-2)^2 - 5 \times 2(-2)^3 =$$
$$= 5 \times 8(-2) + 4 \times 4 \times 4 - 5 \times 2(-8) = -80 + 64 + 80 = +64$$

3.º) Achar o valor numérico de $\dfrac{x+y}{y} + \dfrac{y}{x-y}$

para $\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$

Temos:

$$N = \frac{-2-3}{-3} + \frac{-3}{-2+3} = \frac{-5}{-3} + \frac{-3}{1} = \frac{5}{3} - 3 = -\frac{4}{3}$$

5. Classificação das expressões algébricas. As expressões algébricas classificam-se segundo as operações que afetam as letras que nela figuram e podem ser:

a) ***Racionais*** — quando não contiverem letras sob o sinal de radical ou com expoentes fracionários, que eqüivalem a radicais.

b) ***Irracionais*** — em caso contrário.

Exemplos:

1.º) $2x^2 + 3x - 17$ — racional

2.º) $\sqrt{3} \cdot x - 29$ — racional

3.º) $5\sqrt{x^2+1}$ — irracional

4.º) $5x^{\frac{2}{3}} + 3x$ — irracional

c) ***Inteiras*** — quando não contiverem letras em denominador ou com expoente negativo.

d) ***Fracionárias*** — em caso contrário.

Exemplos:

1.º) $3x^2 - 5x + 68$ — inteira e racional

2.º) $\dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{5}{8}$ — inteira e racional

3.º) $\dfrac{3x^2 + 5}{7x - 3}$ — fracionária

4.º) $3x^{-2} + 18x^{-1} + 63$ — fracionária

6. Monômio. É a expressão algébrica em que não há interposição dos sinais + e —.

Coeficiente. O fator numérico do monômio denomina-se *coeficiente do monômio.*

Os coeficientes dos monômios:

$$-3a^2x^3, \quad 16a^4b^4, \quad -2a^3x$$

são: -3, 16 e -2.

Não se escreve o coeficiente 1. Assim, os monômios:

$$a^2b^3x \quad \text{e} \quad -ab^2c^3$$

têm para coeficientes: 1 e $-$ 1.

Em certos casos, considera-se um fator literal como coeficiente de uma letra: no monômio

$$a^2x$$

a^2 é o coeficiente de x.

Da mesma forma, diz-se que o coeficiente de x^3 no monômio $3a^2x^3$ é $3a^2$.

Grau. Chama-se grau do monômio, a soma dos expoentes dos fatôres literais, subentendendo-se o expoente 1 quando uma letra não tem expoente explícito, e, reciprocamente, o expoente 1 não se escreve. O monômio $3a^3bx^2$ é do 6.º grau.

O grau pode ser considerado apenas em relação a uma letra; assim, o monômio $3a^2bx^3$ é do 3.º grau em relação a x.

Quando num monômio não figura uma letra, diz-se que é do grau 0 em relação a essa letra: $3a^2cx^3 = 3a^2b^0c^1x^3$.

Monômios semelhantes são os que diferem apenas no coeficiente, como, por exemplo:

$$5ax^2, \quad -3ax^2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{3}ax^2$$

7. Polinômio. Polinômio é a soma algébrica de dois ou mais monômios.

Exemplos: $3a^2 - 2b$, $3x^2 + 5x - 8$

Os monômios que formam o polinômio denominam-se *têrmos* do polinômio. Assim, o polinômio $3a^2x - 3ax^2 + 4$ têm três têrmos. O polinômio de dois têrmos denomina-se em particular ***binômio*** e o de três, ***trinômio***; os demais não têm denominação particular.

Grau. O grau de um polinômio é dado pelo seu têrmo de grau mais elevado. Assim, o polinômio

$3xy^4 - 5x^2y^5 + 6x^3y$ é do 7.º grau (do têrmo $-5x^2y^5$)

Podemos também considerar o grau do polinômio em relação a uma certa letra. No polinômio acima,

o grau em relação a x é 3 (do têrmo $6x^3y$);

o grau em relação a y é 5 (do têrmo $-5x^2y^5$).

Quando todos os têrmos são do mesmo grau, o polinômio diz-se *homogêneo.*

Exemplo. O polinômio $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$ é homogêneo do 4.º grau. Êsse grau denomina-se grau de *homogeneidade.*

8. Ordenação. Quando os têrmos de um polinômio se sucedem de modo que os expoentes de uma certa letra decrescem do primeiro ao último, diz-se que o *polinômio está ordenado segundo as potências decrescentes dessa letra.*

O polinômio $2ax^3 - 5abx^2 + 3a^2x + 4a^3b^2$ está ordenado segundo as potências decrescentes de x.

Ao contrário, se as potências de uma certa letra crescem sucessivamente, o polinômio diz-se *ordenado segundo as potências crescentes da mesma letra,* como o polinômio.

$2 - 3x + 4x^2 + x^3$ em relação à letra x.

Ordenar um polinômio é dispor seus têrmos de modo que os expoentes de uma certa letra cresçam ou decresçam. Essa letra denomina-se *principal* ou *ordenatriz.*

Quando num polinômio figuram tôdas as potências de uma certa letra, desde a de expoente 0 até a de grau mais elevado, o polinômio diz-se ***completo*** em relação a essa letra. Ao contrário, diz-se *incompleto*, quando falta qualquer das potências.

Assim, o polinômio $3x^2 - 5x - 2$ é completo, enquanto que $5x^2 - 3$ é incompleto e bem assim $2x^2 + 3x$.

EXERCÍCIOS

Ordenar os seguintes polinômios segundo as potências decrescentes de x.

1. $3a^2x - 5a^3x^4 + ax^5 - 3x^2 + 3a - 5a^4x^3$
2. $5x^4 - ax^3 + 2a^3x - a^4 + 3a^2x^2$
3. $18x^3 - 25x^2 + 5x^4 - 10$

Calcular o valor numérico dos seguintes polinômios para

$$x = -1, \quad y = 2 \quad \text{e} \quad z = -3:$$

4. $2x^4 - 5x^2 + 6x - 10$ — *Resp.:* -19
5. $5x^4y^3 - 7x^3y^4 + 2x^2y^5 - 3xy^6$ — *Resp.:* 408
6. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ — *Resp.:* -38
7. $\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y}$ — *Resp.:* $2\dfrac{2}{3}$

Calcular o valor numérico de:

8. $\dfrac{2}{3}a - \dfrac{a-3}{a^2}$ para $a = \dfrac{2}{5}$ — *Resp.:* $16\dfrac{31}{60}$
9. $\dfrac{0{,}2+x}{0{,}2-x} - \dfrac{x+2}{x-2}$ para $x = 1{,}5$ — *Resp.:* $5\dfrac{9}{13}$

Dizer os coeficientes, em relação a x, dos monômios:

10. $-2a^2x^3$ 11. $2ax^2$ 12. $\dfrac{(a+b)x}{2}$

Dizer os graus dos polinômios:

13. $x^2y - y - 5xy^2 - 5x^3 + y^2$
14. $a^4 - 3a^3b^2 + 4a^2b^4 - 5b^5$
15. $y^4 - 3xy^3 + 7x^2y^2 - 4x^3y$
16. $y^2 - y^3 + 4y + 1$

Classificar as expressões:

17. $3\sqrt{x} - 5x + 1$
18. $\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{5}{x} + \dfrac{3}{4}$
19. $\sqrt{3} \,.\, x^2 - 2\sqrt{3} \,.\, x - 17$
20. $3x^{\frac{2}{3}} - 4x + 7$
21. $\dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{5}{3}x + 1$
22. $x^{-3} - 5x^{-2} + 7x^{-1} + 8$

Ordenar segundo as potências crescentes de y:

23. $xy - 2x^2 + 7xy^3 - y^2$
24. $ay^2 - a^2y - 3y^3 + 4 - y^4$

Calcular o valor numérico para $x = -\dfrac{1}{2}$ e $y = -2$:

25. $3x^3 - y^3 - 4x^2y - 2xy^2 - 7y^3$ — *Resp.:* $69\dfrac{5}{8}$
26. $y^3 - 1 + 5 - 7x^2y$ — *Resp.:* $-\dfrac{1}{2}$
27. $x^2y - y - 16xy^3 - 5x^3 + y^3$ — *Resp.:* $38\dfrac{1}{8}$
28. $y^4 - 3xy^3 + 7x^2y^2 - 4x^3y$ — *Resp.:* 10
29. Calcular $2x^4 - x^3 - 4x^2 - x - 6$ para $x = -\dfrac{3}{2}$ — *Resp.:* 0
30. Calcular $\left(\dfrac{2x-y}{2x+y}\right)^2 - \dfrac{2x+y}{2x-y}$ para $x = 1$ e $y = -4$ — *Resp.:* $\dfrac{1}{3}$

II — ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

9. Adição. ***Soma*** de expressões algébricas é a expressão que, para qualquer sistema de valôres das letras, tem valor numérico igual à soma dos valôres numéricos das expressões dadas, para o mesmo sistema de valôres das letras.

10. Adição de monômios.

Exemplos:

1.º) *Adicionar os monômios* $3a^2b$, $-5ab^2$ e $2ab$.

A soma será, por definição, o polinômio

$$3a^2b - 5ab^2 + 2ab$$

2.º) *A soma dos monômios semelhantes* $5x$, $-7x$ *e* $4x$, **será:**

$$5x - 7x + 4x$$

ou, colocando x em evidência:

$$5x - 7x + 4x = (5 - 7 + 4)x = 2x$$

11. Redução de têrmos semelhantes. Quando num polinômio existem têrmos ou monômios semelhantes, podemos substituí-los pela sua soma. Assim, no polinômio

$$5ab - 3x + 2ab + 7x$$

os têrmos $5ab$ e $2ab$ são semelhantes, bem como $-3x$ e $7x$

Temos, então:

$$5ab - 3x + 2ab + 7x = 7ab + 4x$$

Conclui-se:

Para reduzir têrmos semelhantes, efetua-se a soma algébrica dos coeficientes e conserva-se a parte literal.

A esta simplificação dá-se o nome de redução dos têrmos semelhantes.

Exemplos: 1.º) $2x^2y - 5x^2y + 4x^2y = x^2y$

2.º) $9x^2 - 7ax - 3x^2 + \frac{5}{3}a^2 - 2ax - 2a^2 =$

$= (9 - 3)x^2 - (7 + 2)ax + \left(\frac{5}{3} - 2\right)a^2 =$

$= 6x^2 - 9ax - \frac{1}{3}a^2$

3.º) $ax + bx - cx = (a + b - c)x$

12. Adição de polinômios.

Exemplos:

1.º) *Adicionar os polinômios* $3x^2 - 7$ *e* $2x^3 + 5x^2 - 3x$

Como o valor numérico de um polinômio é a soma algébrica dos valôres numéricos de seus têrmos, concluímos que o polinômio $3x^2 - 7 + 2x^3 + 5x^2 - 3$, tem valor numérico igual à soma dos valôres dos polinômios dados, para qualquer valor atribuído a x. Assim:

$$(3x^2 - 7) + (2x^3 + 5x^2 - 3x) = 3x^2 - 7 + 2x^3 + 5x^2 - 3x$$

ou, reduzindo os têrmos semelhantes e ordenando:

$$(3x^2 - 7) + (2x^3 + 5x^2 - 3x) = 2x^3 + 8x^2 - 3x - 7$$

2.º) *Adicionar os polinômios*

$P_1 = 9a^2b - 5ab^2 - 7b^3$, $P_2 = 7a^3 + 8ab^2 - 2b^3$
e $P_3 = -3a^3 + 3a^2b + 5b^3$

Quando são vários os polinômios, dispomo-los uns sob os outros de modo que os têrmos semelhantes fiquem em coluna. A soma é obtida reduzindo os têrmos de cada coluna.

$$\begin{array}{rrrrr} P_1 = & & 9a^2b & -5ab^2 & -7b^3 \\ P_2 = & 7a^3 & & +8ab^2 & -2b^3 \\ P_3 = & -3a^3 & +3a^2b & & +5b^3 \\ \hline P_1 + P_2 + P_3 = & 4a^3 & +12a^2b & +3ab^2 & -4b^3 \end{array}$$

13. Subtração. Chama-se ***diferença de duas expressões*** A e B e representa-se pela notação.

$$A - B$$

a expressão, cuja soma com B é igual a A. Assim, se representarmos a diferença por D:

$$A - B = D$$

teremos, por definição

$$B + D = A$$

14. Subtração de monômios.

Exemplos:

1.°) *De* $2ax$ *subtrair* $-7ax$.

A diferença obtém-se somando ao minuendo o simétrico do subtraendo. Assim:

$$2ax-(-7ax) = 2ax + 7ax = 9ax$$

Realmente, a soma de $9ax$ com o subtraendo $-7ax$ dá o minuendo:

$$9ax - 7ax = 2ax$$

2.°) $(-3a^2b)-(+2ab) = -3a^2b-2ab$

3.°) $3xy-(-5xy) = 3xy + 5xy = 8xy$

15. Subtração de polinômios.

Exemplos:

1.°) *De* x^3-5x+1 subtrair x^2-3x+1.

Para obter a diferença adiciona-se ao minuendo o subtraendo com os sinais trocados; assim:

$$(x^3-5x+1)-(x^2-3x+1)=x^3-5x+1-x^2+3x-1=x^3-x^2-2x$$

Realmente, somando a diferença $x^3 - x^2 - 2x$ com o subtraendo, temos:

$$x^3-x^2-2x+x^2-3x+1 = x^3-5x+1$$

que é o minuendo.

2.°) *De* $x^4+5x^3y-3ax^2+4y$ *subtrair* $3x^4-2x^3y+y$.

Na prática, escrevemos os têrmos do subtraendo, *com os sinais trocados*, por baixo dos semelhantes do minuendo, reduzindo os têrmos da mesma coluna:

$$\begin{array}{lrrrr} \text{minuendo} \ldots\ldots\ldots\ldots & x^4 & +5x^3y & -3ax^2 & +4y \\ \text{subtraendo (sinais trocados)} \ldots & -3x^4 & +2x^3y & & -y \\ \hline & -2x^4 & +7x^3y & -3ax^2 & +3y \end{array}$$

Êste dispositivo permite efetuar, simultâneamente, adições e subtrações. Seja, por exemplo, calcular $P_1 - P_2 + P_3$, sendo:

$$P_1 = 3a^4b + 5a^3b^2 - 7a^2b^3 + 2b^5$$
$$P_2 = 5ab^4 - 2b^5 + 2a^4b - 3a^3b^2$$
$$P_3 = 2a^3b^2 + 5a^2b^3 - 4b^5 - 3ab^4$$

Escrevemos:

$$\begin{array}{rrrrrr} P_1 = & 3a^4b + & 5a^3b^2 & -7a^2b^3 & & +2b^5 \\ P_2 = & -2a^4b + & 3a^3b^2 & & -5ab^4 & +2b^5 \\ P_3 = & & 2a^3b^2 & +5a^2b^3 & -3ab^4 & -4b^5 \\ \hline P_1-P_2+P_3 = & a^4b + & 10a^3b^2 & -2a^2b^3 & -8ab^4 & \end{array}$$

16. Uso de parênteses. De acôrdo com a regra de adição, podemos suprimir um parênteses precedido do sinal +, ou incluir têrmos em um parênteses precedido do sinal +, *sem alterar os sinais dos mesmos têrmos.*

Ao contrário, de acôrdo com a regra de subtração, podemos suprimir um parênteses precedido do sinal −, ou incluir têrmos num parênteses precedido do sinal −, desde que *troquemos os sinais de todos os têrmos considerados.*

Exemplos:

1.°) $2x^3+5ax^2-3a^2x+a^3 = 2x^3+(5ax^2-3a^2x+a^3)$

2.°) $2x^3+5ax^2-3a^2x+a^3 = 2x^3-(-5ax^2+3a^2x-a^3)$

3.°) $5a^4x+(7a^3x^2-8a^4x)-(5a^3x^2-3a^4x+x^3) =$
$= 5a^4x+7a^3x^2-8a^4x-5a^3x^2+3a^4x-x^3 = 2a^3x^2-x^3$

Observação. Quando numa expressão figuram vários sinais de reunião, uns envolvendo outros, para suprimi-los, é conveniente iniciar a supressão pelo mais interior.

Exemplo:

$$x-\{y-[2x-(3y-2z)]+z\} = x-\{y-[2x-3y+2z]+z\}$$
$$= x-\{y-2x+3y-2z+z\}$$
$$= x-y+2x-3y+2z-z = 3x-4y+z$$

EXERCÍCIOS

Adicionar os monômios:

1. $9x^2$; $7a^2$; $8ax$; $-3x^2$; $-10a^2$ — *Resp.:* $6x^2 + 8ax - 3a^2$
2. $3xy$; $-x^2$; $-2y^2$; $+5xy$; $+8y^2$ — *Resp.:* $-x^2+8xy+6y^2$
3. $5ab$; $-3a^2b$; $-5ab$; $7a^2b$; $9ab$ — *Resp.:* $4a^2b + 9ab$
4. $\frac{2}{3}yz$; $5y^2$; $-\frac{8}{3}yz$; $-\frac{3}{4}y^2$; $\frac{5}{8}yz$ — *Resp.:* $\frac{17}{4}y^2 - \frac{11}{8}yz$

Reduzir os têrmos semelhantes em:

5. $4x^2 - y^2 - x^2 + 3y^2 - 3x^2 - 2y^2$ — *Resp.:* 0
6. $x^3y - xy^3 - 2xy^3 + 3x^3y - 4x^3y$ — *Resp.:* $-3xy^3$
7. $0{,}1a - b - 1{,}2a + 1{,}2b - 0{,}4b + a$ — *Resp.:* $-0{,}1a - 0{,}2b$
8. $ab^2 + a^2b + \frac{2}{3}ab^2 - \frac{1}{2}a^2b$ — *Resp.:* $\frac{5}{3}ab^2 + \frac{1}{2}a^2b$
9. $6y^3 - 1 - 2x^2y + 5 - 4x^2y - x^2y - 5y^3$ — *Resp.:* $y^3 - 7x^2y + 4$

Efetuar as adições:

10. $(3x^3 - 8ax^2 + 8a^2x - 3a^3) + (2a^3 - 7a^2x + 7ax^2 - 2x^3)$
    Resp.: $x^3 - ax^2 + a^2x - a^3$
11. $(3a^4b + 5a^3b^2 - 7a^2b^3 - 9ab^4) + (5ab^4 - 2b^5 + 2a^4b - 3a^3b^2)$
    Resp.: $5a^4b + 2a^3b^2 - 7a^2b^3 - 4ab^4 - 2b^5$
12. $\left(-\frac{3}{4}x^2 + x - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{4}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right)$
    Resp.: $\frac{7}{12}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}$
13. Sendo $P_1 = 3a^3 - 5ab^2 + b^3$; $P_2 = 3a^2b - 2b^3 - 5a^3$;
    $P_3 = 3ab^2 - b^3 + 2a^3$; $P_4 = 8a^3 - 5a^2b + 2b^3$
    calcular $P_1 + P_2 + P_3 + P_4$
    Resp.: $8a^3 - 2a^2b - 2ab^2$
14. Adicionar os polinômios:
    $6y^3 - 2x^2y + 5$; $2xy^2 - 4x^2y - xy^2 - 5$; e $6xy^2 + x^2y - 5x^3 + 1$
    Verificar o resultado calculando os valôres numéricos para
    $x = -1$ e $y = -2$
    Resp.: $6y^3 + 7xy^2 - 5x^2y - 5x^3 + 1$

15. Adicionar os trinômios:
    $9a^2b - 3a^2 + 7b^3$; $8a^3 - 9a^2b - 3b^3$; $8a^2 - 2b^3 - 7a^3$;
    $3a^2b - 7b^3 - 5a^2$; $9a^2b - 3a^3 - 7b^3$
    Resp.: $-2a^3 + 12a^2b - 12b^3$
16. De $5x^2 - 4x + 8$ subtrair $3x^2 - 3x - 7$
    Resp.: $2x^2 - x + 15$
17. De $\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ subtrair $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$
    Resp.: $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$
18. De $4{,}3x^2 - 5{,}1x + 3{,}2$ subtrair $3{,}7x^2 - 0{,}5x - 1{,}8$
    Resp.: $0{,}6x^2 - 4{,}6x + 5$

Efetuar as operações:

19. $5a^4x - 3a^2x^3 + 5a^3x^2 - (5a^3x^2 + 3a^4x - 3a^3x^2 + x^3)$
    Resp.: $2a^4x + 3a^3x^2 - 3a^2x^3 - x^3$
20. $x^3 + x^2y + 2xy^2 - y^3 - (3x^2y + 4xy^2 + x^3 - 7y^3)$
    Resp.: $-2x^2y - 2xy^2 + 6y^3$
21. $x^2y - y^2 - 5xy^2 + (7y^3 - 3xy^2 - 4x^2y + x^3) - (5x^3 + 11xy^2 - y^2)$
    Resp.: $7y^3 - 19xy^2 - 3x^2y - 4x^3$

Sendo: $P_1 = 3a^3 - 5ab^2 + b^3$; $P_3 = 3ab^2 - b^3 + 2a^3$;
$P_2 = 3a^2b - 2b^3 - 5a^3$; $P_4 = 8a^3 - 5a^2b + 2b^3$

Simplificar as expressões:

22. $P_1 - (P_2 - P_3 + P_4)$ — *Resp.:* $2a^3 + 2a^2b - 2ab^2$
23. $P_1 + P_2 - (P_3 - P_4)$ — *Resp.:* $4a^3 - 2a^2b - 8ab^2 + 2b^3$
24. $P_1 - P_3 + (P_2 - P_4)$ — *Resp.:* $-12a^3 + 8a^2b - 8ab^2 - 2b^3$
25. $P_1 + P_4 - (P_2 + P_3)$ — *Resp.:* $14a^3 - 8a^2b - 8ab^2 + 6b^3$

Simplificar as expressões:

26. $b - [a + (b - c) - (a - b)]$
    Resp.: $c - b$
27. $9a^2b - \{8a^3 - [(9a^2b + 3b^3 - 8a^2) - (2b^3 - 7a^3)]\}$
    Resp.: $b^3 + 18a^2b - 8a^2 - a^3$
28. $a - \{(b + c) - [2a - (3b - 2c - a)]\}$
    Resp.: $4a - 4b + c$
29. $[3{,}5x - 4{,}2 - (a - 7{,}2) + 2a] - [4x - (2a - 3{,}5)]$
    Resp.: $3a - 0{,}5x - 0{,}5$
30. $15 - x - \{3a - [5x - (7a - 3 + 6x)]\}$
    Resp.: $18 - 10a - 2x$

III — MULTIPLICAÇÃO DE MONÔMIOS E POLINÔMIOS. PRODUTOS NOTÁVEIS

17. Multiplicação. Produto de dois ou mais polinômios é o polinômio, cujo valor numérico, para quaisquer valôres das letras, é igual ao produto dos valôres numéricos dos polinômios dados, para o mesmo sistema de valôres das letras.

Na multiplicação consideramos três casos:

PRIMEIRO CASO: *multiplicação de monômios.*

SEGUNDO CASO: *multiplicação de um polinômio por um monômio.*

TERCEIRO CASO: *multiplicação de polinômios.*

18. Multiplicação de monômios. De acôrdo com a definição, o produto de dois monômios é obtido, formando um monômio único que contenha todos os fatôres dos monômios dados.

Exemplos:

1.º) Multiplicar $3x^2$ por $5x^3$.

Temos: $3x^2 \times 5x^3 = 3 \times x^2 \times 5 \times x^3$, ou, mudando a ordem dos fatôres $3x^2 \times 5x^3 = 3 \times 5 \times x^2 \times x^3$, ou, aplicando a propriedade associativa: $3x^2 \times 5x^3 = 15x^5$.

2.º) Multiplicar $-3ax^2$ por $5bx^3$.

Temos, anàlogamente:

$$-3ax^2 \times 5bx^3 = -3 \times 5abx^2\,x^3 = -15abx^5$$

3.º) Multiplicar $-4a^2x$ por $-5abx^2$.

Temos:

$$(-4a^2x) \times (-5abx^2) = (-4)(-5)a^2abxx^2 = +20a^3bx^3$$

Dos exemplos conclui-se:

> **Para multiplicar dois monômios, multiplicam-se os coeficientes, somam-se os expoentes das letras comuns, e escrevem-se no produto as letras não comuns com seus expoentes.**

O produto de mais de dois monômios obtém-se pela mesma regra.

Exemplo:

Efetuar a multiplicação: $3x^2y \times \left(-\frac{2}{3}ax^3\right) \times 5ay^2$.

$$3x^2y \times \left(-\frac{2}{3}ax^3\right) \times 5ay^2 = 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 5 \cdot aa \cdot x^2x^3 \cdot yy^2 =$$
$$= -10a^2x^5y^3$$

19. Multiplicação de um polinômio por um monômio. Em virtude da definição de multiplicação e de acôrdo com a regra para multiplicar uma soma por um número, podemos concluir:

> **Para multiplicar um polinômio por um monômio multiplica-se cada têrmo do polinômio pelo monômio.**

Exemplos:

1.º) $(5x-3) \times 2ax = 10ax^2 - 6ax$

2.º) $(3a^2 - 2a + 5) \times (-4a) = -12a^3 + 8a^2 - 20a$

OBSERVAÇÕES:

1) O produto de um polinômio inteiro por um monômio inteiro é um polinômio inteiro.

2) Por ser comutativa a operação de multiplicação, a regra para multiplicar um monômio por um polinômio é a mesma que para multiplicar um polinômio por um monômio.

3) Da igualdade

$$(a + b + c)\,m = am + bm + cm,$$

conclui-se:

$$am + bm + cm = (a + b + c)\,m$$

A esta transformação chama-se ***pôr em evidência o fator comum m.***

20. Multiplicação de polinômios.

I) Multiplicar $a + b$ por $c + d$.

Aplica-se a propriedade distributiva da multiplicação, considerando o primeiro fator como um todo:

$$(a + b)(c + d) = (a + b)\,c + (a + b)\,d = ac + bc + ad + bd$$

Conclui-se:

> **Para multiplicar dois polinômios multiplica-se cada têrmo do multiplicador por todos os têrmos do multiplicando e somam-se os resultados obtidos.**

II) $(2a + b)(x - 3) = 2ax + bx - 6a - 3b.$

III) $(2x + 3)(3x - 4) = 6x^2 + 9x - 8x - 12 = 6x^2 + x - 12.$

Na prática, ordenam-se os dois fatôres segundo as potências de uma mesma letra e adota-se uma disposição análoga à empregada para os números inteiros, dispondo-se os produtos parciais de modo que os têrmos semelhantes fiquem em coluna, o que facilita a redução ao se efetuar a soma dêsses produtos.

Exemplos:

1.º) $(2x^2 - 5xy + y^2)(x - 3y)$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5xy + y^2 \\ x - 3y \\ \hline 2x^3 - 5x^2y + xy^2 \\ - 6x^2y + 15xy^2 - 3y^3 \\ \hline 2x^3 - 11x^2y + 16xy^2 - 3y^3 \end{array}$$

2.º) $(3a^2x^2 - 5ax + 3)(2x + 1)$

$$\begin{array}{l} 3a^2x^2 - 5ax + 3 \\ 2x + 1 \\ \hline 6a^2x^3 - 10ax^2 + 6x \\ \qquad + 3a^2x^2 - 5ax + 3 \\ \hline 6a^2x^3 + (3a^2 - 10a)\,x^2 + (6 - 5a)\,x + 3 \end{array}$$

A redução dos têrmos semelhantes consiste, neste exemplo, em colocar x^2 e x em evidência.

OBSERVAÇÕES:

1) Os dois têrmos extremos, provenientes da multiplicação dos têrmos de maior e menor grau em relação à mesma letra, não sofrem redução.

2) O grau do produto é igual à soma dos graus dos fatôres.

3) De acôrdo com a primeira observação, o produto de dois polinômios tem, no mínimo, dois têrmos.

Exemplo da terceira observação:

$$\begin{array}{l} x^2 - xy + y^2 \\ x + y \\ \hline x^3 - x^2y + xy^2 \\ \quad + x^2y - xy^2 + y^3 \\ \hline x^3 \qquad\qquad + y^3 \end{array}$$

Assim: $(x^2 - xy + y^2)(x + y) = x^3 + y^3$

21. Potência inteira de um monômio.

Um monômio é um produto de fatôres numéricos e literais. Obteremos, portanto, sua potência, *elevando cada um dos fatôres à potência do mesmo grau.*

Assim:

$$(5a^2x^3)^3 = 5^3 \cdot (a^2)^3 \cdot (x^3)^3$$

ou, efetuando:

$$(5a^2x^3)^3 = 125a^6x^9$$

Exemplos: 1.º) $(4a^2b^2)^2 = 16a^4b^4$

2.º) $(-3bx^2)^3 = -27b^3x^6$

3.º) $(-2ab^2x)^4 = 16a^4b^8x^4$

22. Produtos notáveis.

I) ***Quadrado do binômio soma.*** Seja $(a + b)^2$.

Por definição, temos:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

Efetuando a multiplicação:

$$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

Assim: $\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

Conclui-se:

> **O quadrado de uma soma de dois têrmos é igual à soma dos quadrados de seus têrmos mais duas vêzes o produto dêsses têrmos.**

Exemplos:

$(x + 2)^2 = x^2 + 2 \times 2x + 4 = x^2 + 4x + 4$

$(30 + 7)^2 = 30^2 + 2 \times 30 \times 7 + 7^2 = 900 + 420 + 49 = 1\,369$

$(x + 3y)^2 = x^2 + 6xy + 9y^2$

II) ***Quadrado do binômio diferença.*** Seja $(a - b)^2$.

Por definição, temos: $(a - b)^2 = (a - b)$

Efetuando a multiplicação:

$$\begin{array}{l} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \\ \quad - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

Assim: $\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

> **O quadrado de uma diferença é igual à soma dos quadrados de seus têrmos menos duas vêzes o produto dêsses têrmos.**

Exemplos:

$(x - 2)^2 = x^2 - 2 \times 2x + 2^2 = x^2 - 4x + 4$

$(2a - b)^2 = 4a^2 - 4ab + b^2$

$(3x - 2y)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2y + (2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2$

III) ***Produto de uma soma por uma diferença.*** Seja $(a + b)(a - b)$.

Efetuando a multiplicação:

$$\begin{array}{l} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad - ab - b^2 \\ \hline a^2 \quad\quad - b^2 \end{array}$$

Assim: $\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$

> **O produto da soma de duas expressões pela sua diferença é igual à diferença entre seus quadrados.**

Exemplos:

$(2x + y)(2x - y) = (2x)^2 - y^2 = 4x^2 - y^2$

$(3ab + 2x)(3ab - 2x) = (3ab)^2 - (2x)^2 = 9a^2b^2 - 4x^2$

$(a + b + c)(a + b - c) = (a + b)^2 - c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - c^2$

IV) ***Produto de binômios com um têrmo comum.***

É sempre possível ordenar de modo que o têrmo comum seja o primeiro, assim, sejam $(x + a)(x + b)$, que têm o têrmo comum x.

Temos: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Conclui-se:

I) O primeiro têrmo é o quadrado do têrmo comum.

II) O segundo têrmo tem para coeficiente do têrmo comum a soma dos segundos têrmos dos fatôres.

III) O terceiro têrmo é o produto dos segundos têrmos dos fatôres.

Exemplos:

1.º) $(x + 3)(x + 5) = x^2 + (3 + 5)x + 15 = x^2 + 8x + 15$

2.º) $(x - 4)\ (x + 6) = x^2 + 2x - 24$

3.º) $(x + 7)\ (x - 9) = x^2 - 2x - 63$

EXERCÍCIOS

Efetuar as multiplicações:

1. $(-2x^2y) \times (-4a^2x^3)$ — *Resp.:* $8a^2x^5y$
2. $4a^2b \times (-4ab^2)$ — *Resp.:* $-16a^3b^3$
3. $15x^2y \times (-3xy^2)$ — *Resp.:* $-45x^3y^3$
4. $(-4b^3)\ (-3b^2c^4)$ — *Resp.:* $12b^5c^4$
5. $(-2x^2y)\ (-3xy^2)\ (-xy^3)$ — *Resp.:* $-6x^4y^6$
6. $\frac{2}{3}ab^2x \times \frac{5}{8}ax^3$ — *Resp.:* $\frac{5}{12}a^2b^2x^4$
7. $(-0{,}31x^4)\ (-0{,}5ax^2)$ — *Resp.:* $0{,}155ax^6$
8. $3a^m \times \frac{5}{9}a^p \times (-15ax)$ — *Resp.:* $-25a^{m+p+1}x$
9. $3x^{p+1} \times 4x^{p+3} \times 5x^{4-3p}$ — *Resp.:* $60x^{8-p}$
10. $ax^{2-m} \times bx^{m-3} \times abx^{7-2m}$ — *Resp.:* $a^2b^2x^{6-2m}$
11. $(3x^2 - 2x + 1)\ .\ 2x$ — *Resp.:* $6x^3 - 4x^2 + 2x$
12. $(6a^2 - 3ab + 2b^2)\ (-ab)$ — *Resp.:* $-6a^3b + 3a^2b^2 - 2ab^3$
13. $\left(\frac{x^2y}{3} - \frac{3xy^2}{2} + \frac{3y^3}{5}\right)\left(-\frac{5}{9}xy\right)$ — *Resp.:* $-\frac{5x^3y^2}{27} + \frac{5x^2y^3}{6} - \frac{xy^4}{3}$
14. $(2x^{m-1} + 5x^{m-2}y - 3x^{m-3}y^2)\ (-2x^3y)$ — *Resp.:* $-4x^{m+2}y - 10x^{m+1}y^2 + 6x^my^3$
15. $(x^2 + 2x + 1)\ (3x - 1)$ — *Resp.:* $3x^3 + 5x^2 + x - 1$
16. $(x^2 - 3x + 1)\ (2x^2 + 3)$ — *Resp.:* $2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 9x + 3$
17. $(2x + x^2 + 4)\ (x^3 - 2x^2 + 8)$ — *Resp.:* $x^5 + 16x + 32$
18. $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\right)$ — *Resp.:* $\frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{5x}{9} - \frac{4}{9}$
19. $(a^3 - 3a^2 - 30 + 10a)\ (3a^2 + a^3 - 3 - a)$ — *Resp.:* $a^6 - 91a^2 + 90$
20. $(x^2 + xy + y^2)\ (x - y)\ (x^6 + x^3y^3 + y^6)$ — *Resp.:* $x^9 - y^9$
21. $(x^3 - 7x - 6)\ (x - 2)$ — *Resp.:* $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$

22. $(x^3 - 3x^2 + 2x - 6)\ (x + 3)$ — *Resp.:* $x^4 - 7x^2 - 18$
23. $(3x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x - 2)\ (x + 1)$ — *Resp.:* $3x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5x - 2$
24. $(x^2 + 14x)\ (7x - 2)$ — *Resp.:* $7x^3 + 96x^2 - 28x$
25. $(2x - 3)\ (x^2 + x + 3)$ — *Resp.:* $2x^3 - x^2 + 3x - 9$
26. $(2a - b)\ (a^4b^2 + a^3b^3)$ — *Resp.:* $2a^5b^2 + a^4b^3 - a^3b^4$
27. $(3x + y)\ (y^4 - xy^3 + 2x^2y^2)$ — *Resp.:* $y^5 + 3xy^4 - x^2y^3 + 6x^3y^2$
28. $(a^6 + a^3b + b^2)\ (a^3 - b)$ — *Resp.:* $a^9 - b^3$
29. $(x^4 - x^2y + y^2)\ (x^2 + y)$ — *Resp.:* $x^6 + y^3$
30. $(x^2 - xy + y^2)\ (x + uy)$ — *Resp.:* $x^3 + y^3$

Resolver as expressões:

31. $(x^3 - x^2 + y^2) - (x^2 - y^2 + xy)\ (x - 1)$ — *Resp.:* $xy + xy^2 - x^2y$
32. $2x^3 - 8ax^2 + 8a^2x - 3a^3 - (2a^2 + x^2 - 3ax)\ (2x - a)$ — *Resp.:* $x^3 - ax^2 + a^2x - a^3$
33. $8x^5 + 4x^3y^2 - 12xy^4 + 4y^5 - (2x^2 - 3xy + y^2)\ (4x^3 + 6x^2y + 4y^3)$ — *Resp.:* $18x^3y^2 - 14x^2y^3$
34. $[(x + 2)\ (x + 3) - (x^2 - 2x + 5)]\ (x^2 - 5x + 7)$ — *Resp.:* $7x^3 - 34x^2 + 44x + 7$
35. $(x - 3)\ (3 - x)\ (x - 3) - [(x + 5)\ (x - 3) + (3x^2 - x + 3)]$ — *Resp.:* $x^3 - 27$

Escrever o resultado das operações:

36. $(5a^3x^2)^2 =$
37. $(-2x^3y^4)^3 =$
38. $(-3ab^2x^3)^4 =$
39. $(4x^3y^2)^2 =$
40. $(-3a^2x^5)^3 =$
41. $(3x + y)^2 =$
42. $(5x - 2y)^2 =$
43. $(6xy + 3x)^2 =$
44. $(3x + 5y)\ (3x - 5y) =$
45. $(xy + 3c)\ (xy - 3c) =$
46. $(x + 5)^2 =$
47. $(x - 3)^2 =$
48. $[(x + y) + z]\ [(x + y) - z] =$
49. $(a + 3b + 2c)\ (a - 3b + 2c) =$
50. $(a + 3b - 2c)\ (a - 3b + 2c) =$
51. $(x + 7)^2 =$
52. $(x - 9)^2 =$
53. $(a + 2b - 3c - d)\ (a + 2b + 3c + d)$

54. $(2xy + 3z)^2 =$
55. $(5x^2 - y^2)^2 =$
56. $(y^3 + 2x^3)(y^3 - 2x^3) =$
57. Achar o binômio cujo quadrado é: $x^2 + 10x + 25$
58. Achar os dois fatôres cujo produto é: $9x^2 - y^2$
59. Achar o binômio cujo quadrado é: $9x^2 - 6xy + y^2$
60. $(x - y)^2 =$
61. $(2x + 3)^2 =$
62. $(x + 3)(x + 7) =$
63. $(x - 8)(x + 16) =$
64. $(x + 10)(x - 9) =$
65. $(x - 9)(x - 4) =$

IV — DIVISÃO DE MONÔMIOS E POLINÔMIOS

23. Definição. Chama-se ***quociente exato*** de duas expressões algébricas, denominadas ***dividendo*** e ***divisor***, uma terceira expressão algébrica, cujo produto pelo divisor reproduz o dividendo.

Assim, se representarmos por A o dividendo, por B o divisor, e por Q o quociente, teremos, por definição,

$$A = B \times Q$$

Forma-se o quociente exato de A por B, escrevendo a expressão $\frac{A}{B}$; daí, a igualdade

$$\frac{A}{B} = Q$$

O quociente exato de duas expressões algébricas inteiras A e B não é, em geral, uma expressão inteira e sim fracionária, isto é, uma *fração*. Quando o quociente é uma expressão inteira, diz-se que o dividendo é *divisível* pelo divisor.

Divisão é a operação que tem por fim achar uma expressão inteira, caso exista, que seja o quociente exato de duas expressões inteiras. Quando essa expressão inteira existe a divisão diz-se *exata* ou *possível*.

Assim, a divisão é exata quando o quociente exato é uma expressão inteira e inexata quando o quociente exato é uma expressão fracionária.

Observação importante. Quando o divisor B fôr nulo, o quociente não existe.

24. Divisão de monômios. Seja dividir $35a^2b^5$ por $5ab^2$.

Por definição, devemos achar um monômio que multiplicado por $5ab^2$ dê o produto $35a^2b^5$. O coeficiente do monômio procurado deve ser, pois, o número que multiplicado por 5 dê 35, isto é, a o quociente da divisão de 35 por 5 ou 7; o expoente de a, somado a 1 (expoente de a no divisor) deve dar 2 (expoente de a no dividendo), será, portanto, $2 - 1$ ou 1; o expoente de b deve ser tal que somado a 2 dê 5 e será, portanto, $5 - 2$ ou 3.

O monômio procurado (quociente) é, portanto, $7ab^3$.

Da mesma forma teremos:

1) $-48a^2x^3 : 6ax = -8a^{2-1}x^{3-1} = -8ax^2$

2) $-33x^4 : -3x = 11x^{4-1} = 11x^3$

Do exposto conclui-se:

Divide-se o coeficiente do dividendo pelo coeficiente do divisor, e dá-se a cada letra expoente igual ao seu expoente no dividendo menos o seu expoente no divisor.

Conseqüências:

a) O quociente de dois monômios é, sempre, um monômio.

b) A condição necessária e suficiente para que o quociente de dois monômios inteiros seja um monômio inteiro é que o dividendo contenha tôdas as letras que figuram no divisor, com expoentes maiores, ou, no mínimo, iguais.

Na divisão de monômios, qualquer letra que, com a aplicação da regra, apareça com expoente zero, pode ser omitida; e, recìprocamente, desde que uma letra não figure num monômio, deve ser considerada com expoente zero.

Exemplos:

1.º) $\dfrac{42a^3bx^4}{7a^3x^2} = 6a^{3-3}b^{1-0}x^{4-2} = 6bx^2$

2.º) $-35a^3x^2y : 5a^5x = -7a^{-2}xy$

25. Divisão de um polinômio por um monômio. O polinômio é uma soma de monômios; logo, para efetuar a divisão, basta aplicar a propriedade distributiva da divisão, isto é, dividir cada um dos têrmos do polinômio pelo monômio.

Exemplos:

1.º) $(6ax^3 - 21a^2x^2 + 9a^3x) : 3ax = \dfrac{6ax^3}{3ax} - \dfrac{21a^2x^2}{3ax} + \dfrac{9a^3x}{3ax} =$

$= 2x^2 - 7ax + 3a^2$

2.º) $(9a^{2n} - 18a^{3n-1} + 27a^{4n-2}) : 3a^{2n-1} =$

$= \dfrac{9a^{2n}}{3a^{2n-1}} - \dfrac{18a^{3n-1}}{3a^{2n-1}} + \dfrac{27a^{4n-2}}{3a^{2n-1}} = 3a - 6a^n + 9a^{2n-1}$

26. Divisão de polinômios com uma variável. Seja dividir $x^2 + 15x + 56$ por $x + 8$.

Devemos achar a expressão (quociente) que multiplicada pelo divisor (fator dado) reproduza o dividendo (produto dado).

O dividendo é o produto total do divisor pelo quociente. Logo, pelo que sabemos de multiplicação, o seu têrmo de maior grau (x^2) se origina do produto do têrmo de maior grau do divisor (x) pelo têrmo de maior grau do quociente (fator procurado).

Conclui-se:

O primeiro têrmo do quociente obtém-se dividindo o têrmo de maior grau do dividendo pelo têrmo de maior grau do divisor:

$$x^2 : x = x$$

logo, *x é o primeiro têrmo do quociente.*

Do produto total dado, já podemos portanto calcular um dos produtos parciais, que será obtido, multiplicando x (têrmo já conhecido do quociente) pelo divisor $x + 8$:

$$x(x + 8) = x^2 + 8x$$

Se subtrairmos êste produto parcial do dividendo (produto total), o resto será a soma dos produtos parciais do divisor pelos restantes têrmos do quociente:

$$x^2 + 15x + 56 - (x^2 + 8x) = 7x + 56$$

$7x + 56$ é, portanto, o produto do divisor $(x + 8)$ pelos restantes têrmos do quociente; o seu têrmo de maior grau, $7x$, vem, por um raciocínio análogo, do produto do têrmo de maior grau do divisor pelo segundo têrmo do quociente.

Êste obter-se-á, pois, dividindo o 1.º têrmo do resto pelo 1.º do divisor:

$$7x : x = 7$$

O *segundo têrmo do quociente é* 7. O 2.º produto parcial de que se compõe o dividendo é: $7(x + 8) = 7x + 56$.

O quociente é, portanto, $x + 7$.

A disposição prática do cálculo é a seguinte:

Dividendo................	$x^2+15x+56$	$x+8$.......divisor
Produto do divisor por x, com os sinais trocados para se efetuar a subtração	$-x^2-8x$	$x+7$...quociente
1.º resto	$7x+56$	
	$-7x-56$	
	0	

Conclui-se a regra para achar o quociente:

> **1) Ordenam-se os dois polinômios segundo as potências decrescentes da mesma letra.**
>
> **2) Divide-se o 1.° têrmo do dividendo pelo 1.° têrmo do divisor. O resultado é o 1.° têrmo do quociente.**
>
> **3) Multiplica-se o divisor pelo 1.° têrmo do quociente, e subtrai-se o produto do dividendo.**
>
> **4) Divide-se o 1.° têrmo do resto, pelo 1.° têrmo do divisor. Encontra-se o 2.° têrmo do quociente.**
>
> **E assim por diante.**

Exemplos:

1.°) Dividir $3x^3 + 5x^2 + x - 1$ por $x^2 + 2x + 1$.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 + 5x^2 + x - 1 & x^2 + 2x + 1 \\ \hline -3x^3 - 6x^2 - 3x & 3x - 1 \\ \hline -x^2 - 2x - 1 & \\ +x^2 + 2x + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

2.°) Dividir $5x^2 - 6x^3 + 2x^4 - 9x + 3$ por $2x^2 + 3$.

Ordenando o dividendo e o divisor segundo as potências decrescentes:

$$\begin{array}{l|l} 2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 9x + 3 & 2x^2 + 3 \\ \hline -2x^4 \qquad\quad - 3x^2 & x^2 - 3x + 1 \\ \hline -6x^3 + 2x^2 - 9x + 3 & \\ +6x^3 \qquad\quad + 9x & \\ \hline 2x^2 \qquad + 3 & \\ -2x^2 \qquad - 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

3.°) Dividir: $x^5 + 16x + 32$ por $x^3 - 2x^2 + 8$.

Quando o dividendo é incompleto, é útil completá-lo para fazer a divisão:

$$\begin{array}{l|l} x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 16x + 32 & x^3 - 2x^2 + 8 \\ \hline -x^5 + 2x^4 \qquad\quad - 8x^2 & x^2 + 2x + 4 \\ \hline +2x^4 + 0x^3 - 8x^2 + 16x + 32 & \\ -2x^4 + 4x^3 \qquad\quad - 16x & \\ \hline 4x^3 - 8x^2 \qquad + 32 & \\ -4x^3 + 8x^2 \qquad - 32 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

4.°) Dividir $a^4 + 2a + 33$ por $a^2 - 2a + 11$.

$$\begin{array}{l|l} a^4 + 0a^3 + 0a^2 + 2a + 33 & a^2 - 2a + 11 \\ \hline -a^4 + 2a^3 - 11a^2 & a^2 + 2a - 7 \\ \hline +2a^3 - 11a^2 + 2a + 33 & \\ -2a^3 + 4a^2 - 22a & \\ \hline -7a^2 - 20a + 33 & \\ +7a^2 - 14a + 77 & \\ \hline -34a + 110 & \end{array}$$

Obtido o resto parcial $-34a + 110$, se continuarmos a divisão, a letra ordenatriz aparecerá no quociente com expoentes negativos e a divisão poderá ser prolongada indefinidamente.

O polinômio $a^2 + 2a - 7$ denomina-se *quociente inteiro* e o polinômio $-34a + 110$, de grau menor que o divisor, denomina-se *resto da divisão.*

Neste caso podemos definir a divisão:

Dividir o polinômio A *pelo polinômio* B *é determinar duas outras expressões* Q *e* R, *sendo* R *de grau menor que o divisor* B, *tais que verifiquem a igualdade:*

$$A = B \times Q + R$$

Observemos que, pela última definição, são abrangidos também os casos anteriores de divisão exata em que $R = O$. É, portanto, uma definição geral.

EXERCÍCIOS

Efetuar as divisões:

1. $27xy^3 : 3xy$ — *Resp.:* $9y^2$
2. $-54a^4x^3z^5 : 6a^3xz^2$ — *Resp.:* $-9ax^2z^3$
3. $20a^4x^2 : -5a^2$ — *Resp.:* $-4a^2x^2$
4. $-36a^{12}b^8 : 6a^9b^8$ — *Resp.:* $-6a^3$
5. $15a^4 : 3a^2b^3$ — *Resp.:* $5a^2b^{-3}$
6. $7a^{n+5} : a^n$ — *Resp.:* $7a^5$
7. $-3a^{n+1} : -a^{n-1}$ — *Resp.:* $3a^2$
8. $81a^{n+2}x^{n-2} : 9a^2x^{n-5}$ — *Resp.:* $9a^n x^3$
9. $-56a^3x^{n-4} : 7a^5x^{4-n}$ — *Resp.:* $-8a^{-2}x^{2n-8}$
10. $18x^3y^n : 12x^n y^4$ — *Resp.:* $1{,}5x^{3-n}y^{n-4}$
11. $(4a^2 - 2ab) : 2a$ — *Resp.:* $2a - b$
12. $(4a^4x^6 - 40a^7x^5) : 4a^4x^5$ — *Resp.:* $x - 10a^3$
13. $(7a^3b^4 - 14a^2b^5 + 21ab^6) : 7ab^4$ — *Resp.:* $a^2 - 2ab + 3b^2$
14. $(5x^3y - 10x^2y^2 + 5xy^3) : 5xy$ — *Resp.:* $x^2 - 2xy + y^2$
15. $(12a^{n+1}x - 18a^{2n-2}x^2 + 9a^{3n-3}x^3) : 3a^{n+1}x$ — *Resp.:* $4 - 6a^{n-3}x + 3a^{2n-4}x^2$
16. $(75x^3 - 50x^2 + 25x) : (-25x)$ — *Resp.:* $-3x^2 + 2x - 1$
17. $(49a^3b + 14a^2b^2 - 7ab^3) : (7ab)$ — *Resp.:* $7a^2 + 2ab - b^2$
18. $(16x^4 - 32x^2 + 64x^3) : (-8x)$ — *Resp.:* $-2x^3 + 4x - 8x^2$
19. $\left(\frac{3}{4}x^2y + \frac{5}{6}xy^2\right) : \left(\frac{2}{3}xy\right)$ — *Resp.:* $\frac{9}{8}x + \frac{5}{4}y$

Efetuar as divisões:

20. $x^2 - 18x + 80$ por $x - 10$ — *Resp.:* $x - 8$
21. $a^3 + 27$ por $a - 3$ — *Resp.:* $Q = a^2 + 3a + 9$; $R = 54$
22. $(x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12) : (x - 2)$ — *Resp.:* $Q = x^3 - 7x - 6$; $R = 0$
23. $(x^4 - 7x^2 + 12) : (x + 3)$ — *Resp.:* $Q = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$; $3 = R\ 0$

24. $(3x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5x - 2) : (x + 1)$ — *Resp.:* $Q = 3x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x - 2$; $R = 0$
25. $(7x^3 + 96x^2 - 28x - 5) : (7x - 2)$ — *Resp.:* $Q = x^2 + 14x$; $R = -5$
26. $(2x^3 - x^2 - 9 + 3x) : (2x - 3)$ — *Resp.:* $Q = x^2 + x + 3$
27. $(x^5 - 3bx^4 + 5b^2x^3 - 8b^3x^2 + 6b^4x - 4b^5) : (x - 2b)$ — *Resp.:* $Q = x^4 - bx^3 + 3b^2x^2 - 2b^3x + 2b^4$; $R = 0$
28. $(2x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 3) : (x - 2)$ — *Resp.:* $Q = 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 6x + 12$; $R = 21$
29. $(x^5 + 2x^4 - x^2 + 4) : (x + 2)$ — *Resp.:* $Q = x^4 - x + 2$; $R = 0$
30. $(2x^4 + 6x^3 + 2x + 6) : (x + 3)$ — *Resp.:* $Q = 2x^3 + 2$; $R = 0$
31. $(6a^4 - 19a^3 + 46a - 29) : (3a - 5)$ — *Resp.:* $Q = 2a^3 - 3a^2 - 5a + 7$; $R = 6$
32. $6x^3 - x^2 - 9x + 4$ por $2x^2 - 3x + 1$ — *Resp.:* $3x + 4$
33. $4x^5 - 13x^3 - 3x - 18$ por $2x^2 - x - 6$ — *Resp.:* $2x^3 + x^2 + 3$
34. $4x^4 - 13x^2 + 12x - 3$ por $2x^2 - 3x + 1$ — *Resp.:* $2x^2 + 3x - 3$
35. $x^5 + 16x - 32$ por $x^3 + 2x^2 - 8$ — *Resp.:* $x^2 - 2x + 4$
36. $a^6 - 91a^2 + 90$ por $a^2 - 4a + 3$ — *Resp.:* $a^4 + 4a^3 + 13a^2 + 40a + 30$
37. $x^5 + 12x^2 + 3x^4 - 16$ por $x^2 + 3x - 4$ — *Resp.:* $Q = x^3 + 4x$; $R = 16x - 16$
38. $x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 6$ por $x^2 + x - 3$. Verificar a exatidão do resultado para $x = -2$ — *Resp.:* $Q = x^3 - 2x^2 + 4x - 12$; $R = 36x - 42$, valor numérico $= -6$
39. $14x^3 - 20x^2 + 5x^4 - 12x^5 + 13x + 6x^6 - 3$ por $-2x^2 + 3x + 3x^4 - 1$ — *Resp.:* $2x^2 - 4x + 3$
40. $9x^4 - 4x^3 + 1 + \frac{58}{9}x^2 - \frac{4}{3}x$ por $3x^2 - \frac{2}{3}x + 1$ — *Resp.:* $3x^2 - \frac{2}{3}x + 1$

V — CASOS SIMPLES DE FATORAÇÃO

27. Noção de fatoração. Definição. No estudo da multiplicação vimos que

$$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$$

e, portanto, podemos concluir:

$$a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)$$

Assim, a expressão $a^2 - b^2$ pode ser transformada no produto das expressões inteiras $a + b$ e $a - b$. A essa transformação damos o nome de *decomposição da expressão em fatôres* ou *fatoração*.

28. Casos de fatoração.

I) ***Todos os têrmos do polinômio têm um fator comum.*** Seja decompor.

$$ax^3 + bx^2 + cx.$$

Sendo todos os têrmos divisíveis por x, temos:

$$\frac{ax^3+bx^2+cx}{x} = ax^2+bx+c\ \therefore\ ax^3 + bx^2+cx=x(ax^2+bx+c)$$

Os fatôres são x e ax^2+bx+c. Diz-se que o fator x foi pôsto em evidência.

Exemplo: Colocar em evidência os fatôres comuns do polinômio: $45a^3y^6 - 90a^6y^8 - 360a^8y^9$

Os fatôres comuns são 45, a^3 e y^6; temos, então:

$$45a^3y^6 - 90a^6y^8 - 360a^8y^9 = 45a^3y^6(1 - 2a^3y^2 - 8a^5y^3)$$

EXERCÍCIOS (*)

Decompor em fatôres:

1. $4a^2 - 2ab$
2. $3a^2b^3 - 6a^3b^2$
3. $4a^4x^6 - 40a^7x^5$
4. $45a^3y^6 - 90a^6y^8 - 360a^8y^9$
5. $7a^3b^4 - 14a^2b^5 + 21ab^6$
6. $32x^7y^{10} + 96x^5y^7 - 128x^4y^8$
7. $(a - b)y + (a - b)x - (a - b)z$
8. $2y(3y + 2x^2) - (3y + 2x^2)$

II) ***O polinômio é a diferença entre dois quadrados.***

Considerando que $(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$, concluímos:

$$a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)$$

Portanto, os polinômios dessa forma podem ser transformados no produto da soma pela diferença das raízes quadradas de seus têrmos.

Exemplos:

1.º) $16 - a^2 = (4 + a)\ (4 - a)$.

2.º) $(a - b)^2 - x^2 = (a - b + x)\ (a - b - x)$.

3.º) $x^2 - (a - b)^2$. As raízes são: x e $a - b$. A soma das raízes é $x + a - b$ e a diferença $x - a + b$. Assim, temos:

$$x^2 - (a - b)^2 = (x + a - b)\ (x - a + b)$$

EXERCÍCIOS

Decompor:

9. $4a^2 - 9x^2$
10. $1 - x^2$
11. $25a^2 - 4b^2$
12. $x^2 - 4$
13. $\frac{4x^2}{y^2} - 1$
14. $m^4n^2 - 16x^2$
15. $(a + 2)^2 - x^2$
16. $(3x + y)^2 - (3y - x)^2$

(*) As respostas dos exercícios de fatoração encontram-se nas páginas 80/81.

III) ***O polinômio é um trinômio quadrado.*** Temos:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ e } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Então, para que um trinômio seja quadrado, deve ter dois têrmos quadrados e o terceiro têrmo deve ser o duplo produto das raízes quadradas dos primeiros.

Das igualdades acima, concluímos:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \text{ e } a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Assim, o trinômio quadrado se decompõe no produto de dois fatôres iguais, que são obtidos extraindo as raízes dos têrmos quadrados e reunindo-as com o sinal do outro têrmo.

Exemplos:

1.º) $x^2 + 14x + 49$ é quadrado porque os têrmos x^2 e 49 são quadrados de x e 7 e o outro têrmo, $14x$, é o duplo produto de suas raízes.

Portanto,

$$x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2.$$

2.º) $x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$

3.º) $y^2 + 30xy + 225x^2 = (y + 15x)^2$.

EXERCÍCIOS

Decompor em fatôres:

17. $x^2 + 6x + 9$
18. $9x^2 + 12x + 4$
19. $y^2 - 2ay + a^2$
20. $x^2 - 38x + 361$
21. $x^2 - 4xy + 4y^2$
22. $x^2 + 2x + 1$
23. $a^2x^2 + 2ax + 1$
24. $4x^2 - 24xy + 36y^2$
25. $a^2 + 32a + 256$
26. $121 - 44x + 4x^2$

IV) ***Trinômio do 2.º grau, cujo coeficiente do primeiro têrmo é a unidade.*** De acôrdo com a regra da multiplicação temos:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Donde concluímos:

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

Assim, dado o trinômio $x^2 + px + q$, se determinarmos dois números a e b, tais que $a + b = p$ e $ab = q$, poderemos escrever:

$$x^2 + px + q = x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

O trinômio do 2.º grau, $x^2 + px + q$, se decompõe em fatôres binômios, que têm para 1.º têrmo x e para segundos têrmos dois números, cujo produto é q e cuja soma é p.

Exemplos:

1.º) Decompor em fatôres $x^2 + 5x + 6$. Trata-se de achar dois números, cujo produto é 6, e cuja soma é 5. Os números que têm 6 para produto são: 1 e 6, 2 e 3. A soma dos dois últimos é 5, logo:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

2.º) Decompor $x^2 - 7x + 12$. Temos que achar dois números, cujo produto seja 12 e cuja soma seja -7. O produto é positivo e a soma negativa; logo, os dois números são negativos. Os números negativos que multiplicados dão 12, são: -1 e -12, -2 e -6, -3 e -4; a soma dos dois últimos é -7; logo:

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$$

3.º) Decompor $x^2 + 15x - 16$. Os dois números cujo produto é -16 têm sinais contrários (produto negativo); como a soma $(+15)$ é positiva, o número positivo tem maior valor absoluto. Os números nestas condições, cujo produto é -16, são: -1 e 16, -2 e 8, -4 e 4. Os dois primeiros têm 15 para soma; logo:

$$x^2 + 15x - 16 = (x - 1)(x + 16)$$

4.º) Decompor $x^2 - 3x - 40$. Os dois números, cujo produto é -40, têm sinais contrários; como a soma -3 é negativa, segue-se que o de maior valor absoluto é o negativo. Os números são: 1 e -40; 2 e -20, 4 e -10, 5 e -8; os dois últimos têm soma -3; logo:

$$x^2 - 3x - 40 = (x + 5)(x - 8)$$

EXERCÍCIOS

Decompor:

27. $x^2 + 11x + 24$	32. $x^2 + 8x + 15$
28. $x^2 - 29x + 190$	33. $x^2 - 7x - 8$
29. $y^2 + 4y - 12$	34. $x^2 - 30x + 200$
30. $x^2 - 5x - 24$	35. $a^2 + 6ab + 8b^2$
31. $a^2 - 13a + 36$	36. $x^2 - 5xy + 6y^2$

29. Decomposição por grupamento. *Grupados os têrmos, os grupos de 2, 3 ou mais têrmos têm um polinômio como fator comum.*

Exemplos:

1.º) $ax - bx + ay - by$. Grupando os têrmos que têm fator comum e colocando êste fator comum em evidência, temos:

$$ax - bx + ay - by = (ax - bx) + (ay - by) = (a - b)x + (a - b)y$$

Assim, aparecendo o fator comum $a - b$ aos dois têrmos, podemos pô-lo em evidência, e obteremos:

$$(a - b)x + (a - b)y = (a - b)\ (x + y)$$

concluímos, finalmente:

$$ax - bx + ay - by = (a - b)\ (x + y)$$

2.º) $2x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = (2x^3 - 3x^2) - (4x - 6) =$
$= (2x - 3)x^2 - (2x - 3)2 = (2x - 3)\ (x^2 - 2).$

3.º) $4x^3 - 12x^2 - x + 3 = (4x^3 - 12x^2) - (x - 3) =$
$= 4x^2(x - 3) - 1(x - 3) = (x - 3)\ (4x^2 - 1).$

EXERCÍCIOS

Decompor por grupamento:

37. $x^4 - x^3 + 5x^2 - 5x$	40. $2x^3 + x^2 - 6x - 3$
38. $3x^3 - 6x^2 + x - 2$	41. $2ax + 3by - 2bx - 3ay$
39. $x^3 - 3x^2 - 8x + 24$	42. $ax^2 - abx - bx + b^2$

30. Regra para fatorar um polinômio. Para fatorar um polinômio:

1.º) Põem-se os fatôres comuns em evidência;

2.º) Verifica-se se a expressão obtida é de um dos tipos estudados, relativos aos produtos notáveis;

3.º) Se a expressão obtida não se aproxima de nenhum dos tipos de produtos notáveis, tenta-se a decomposição por grupamento.

Exemplos:

1.º) Decompor $3x^2 - 21x + 36$. Pondo o fator 3 em evidência:

$$3x^2 - 21x + 36 = 3(x^2 - 7x + 12)$$

A expressão entre parênteses é um trinômio do 2.º grau (3.º tipo); logo, temos:

$$3x^2 - 21x + 36 = 3(x - 3)\ (x - 4).$$

2.º) Decompor $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x$. Pondo x em evidência:

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x = x(x^3 - 2x^2 + 3x - 6)$$

Como a expressão entre parênteses não é de nenhum dos quatro tipos, decompomos por grupamento, e teremos:

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x = x[x^2(x - 2) + 3(x - 2)] = x(x - 2)\ (x^2 + 3)$$

31. Aplicações.

PRIMEIRA. ***Achar o máximo divisor comum de polinômios.*** Chama-se máximo divisor comum de várias expressões algébricas, o produto dos fatôres primos comuns a essas expressões, consideradas uma única vez e com os menores expoentes.

Exemplos:

1.º) Sejam as expressões $12a^3b^2x$ e $18a^2b^3x^2$.

Os fatôres primos comuns com os menores expoentes são 2, 3, a^2, b^2 e x; logo, o m.d.c. será: $6a^2b^2x$.

2.º) Achar o m.d.c. de $x^2 - 16$ e $x^2 + 4x$.

Decompondo os polinômios, obtemos:

$$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$$
$$x^2 + 4x = (x + 4)x$$

Concluímos: $\quad$ m.d.c. $= x + 4$

SEGUNDA. ***Achar o menor múltiplo comum de polinômios.*** O m.m.c. de várias expressões algébricas é o produto dos fatôres primos que figuram nessas expressões, considerados uma única vez e com os maiores expoentes.

Exemplos:

1.º) Achar o m.m.c. de $x^2 - 1$ e $x^2 + x$.

Decompondo os polinômios, obtemos:

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$
$$x^2 + x = x(x + 1)$$

Concluímos:

$$\text{m.m.c.} = x(x + 1)(x - 1) = x(x^2 - 1) = x^3 - x$$

2.º) Achar o m.m.c. dos polinômios $x^2 + 4x + 4$ e $x^2 + 5x + 6$. Temos:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+4x+4 = (x+2)^2 \\ x^2+5x+6 = (x+2)(x+3) \end{array}\right\} \therefore \text{m.m.c.} = (x+2)^2(x+3)$$

EXERCÍCIOS

Respostas dos exercícios 1 a 42:

1. $2a(2a-b)$
2. $3a^2b^2(b - 2a)$
3. $4a^4x^5(x - 10a^3)$
4. $45a^3y^6(1 - 2a^3y^2 - 8a^5y^3)$
5. $7ab^4(a^2 - 2ab + 3b^2)$
6. $32x^4y^7(x^3y^3 + 3x - 4y)$
7. $(a - b)(y + x - z)$
8. $(3y + 2x^2)(2y - 1)$
9. $(2a + 3x)(2a - 3x)$
10. $(1 + x)(1 - x)$
11. $(5a + 2b)(5a - 2b)$
12. $(x + 2)(x - 2)$
13. $\left(\frac{2x}{y} + 1\right)\left(\frac{2x}{y} - 1\right)$
14. $(m^2n + 4x)(m^2n - 4x)$
15. $(a + 2 + x)(a + 2 - x)$

16. $4(x + 2y)(2x - y)$
17. $(x + 3)^2$
18. $(3x + 2)^2$
19. $(y - a)^2$
20. $(x - 19)^2$
21. $(x - 2y)^2$
22. $(x + 1)^2$
23. $(ax + 1)^2$
24. $(2x - 6y)^2$
25. $(a + 16)^2$
26. $(11 - 2x)^2$
27. $(x + 3)(x + 8)$
28. $(x - 19)(x - 10)$
29. $(y + 6)(y - 2)$
30. $(x + 3)(x - 8)$
31. $(a - 4)(a - 9)$
32. $(x + 3)(x + 5)$
33. $(x + 1)(x - 8)$
34. $(x - 10)(x - 20)$
35. $(a + 2b)(a + 4b)$
36. $(x - 2y)(x - 3y)$
37. $x(x - 1)(x^2 + 5)$
38. $(x - 2)(3x^2 + 1)$
39. $(x - 3)(x^2 - 8)$
40. $(2x + 1)(x^2 - 3)$
41. $(2x - 3y)(a - b)$
42. $(ax - b)(x - b)$

Exercícios de revisão. Decompor:

1. $9xy - 12y^2$ — *Resp.:* $3y(3x - 4y)$
2. $42x^6y^2 - 14x^4y^4 + 56x^2y^6$ — *Resp.:* $14x^2y^2(3x^4 - x^2y^2 + 4y^4)$
3. $x^2 - 6x^3 + 12x^4$ — *Resp.:* $x^2(1 - 6x + 12x^2)$
4. $8a^2b^2x^2 - 16a^3bx^3 - 24a^2bx^4$ — *Resp.:* $8a^2bx^2(b - 2ax - 3x^2)$
5. $(a - b)x + (a - b)y - (a - b)z$ — *Resp.:* $(a - b)(x + y - z)$
6. $y^3 - y^2 - y + 1$ — *Resp.:* $(y + 1)(y - 1)^2$
7. $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x$ — *Resp.:* $x(x - 2)(x^2 + 3)$
8. $4x^4 - x^2$ — *Resp.:* $(2x - 1)(2x + 1)x^2$
9. $x^2 + 30x + 225$ — *Resp.:* $(x + 15)^2$
10. $x^2 - 26x + 169$ — *Resp.:* $(x - 13)^2$
11. $x^4 - 16$ — *Resp.:* $(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4)$
12. $x^2 - 13x - 68$ — *Resp.:* $(x - 17)(x + 4)$
13. $x^3 + 5x^2 - 4x - 20$ — *Resp.:* $(x + 5)(x + 2)(x - 2)$
14. $x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ — *Resp.:* $(x^2 + y^2)^2$
15. $x^3 - 6x^2 + x - 6$ — *Resp.:* $(x - 6)(x^2 + 1)$
16. $x^6 - y^6$ — *Resp.:* $(x^3 + y)^3 (x^3 - y^3)$
17. $x^3 - 6x^2 - 4x + 24$ — *Resp.:* $(x + 2)(x - 2)(x - 6)$
18. $x^4 - y^4$ — *Resp.:* $(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$
19. $(x - m)^2 - n^2$ — *Resp.:* $(x - m + n)(x - m - n)$

20. $x^2 + 3x - 70$ *Resp.:* $(x + 10)(x - 7)$
21. $x^2 + 42x + 441$ *Resp.:* $(x + 21)^2$
22. $x^2 - 2x - 15$ *Resp.:* $(x + 3)(x - 5)$
23. $3x^2 - 21x + 36$ *Resp.:* $3(x - 3)(x - 4)$
24. $3x^2 - 9ax + 6a^2$ *Resp.:* $3(x - 2a)(x - a)$
25. $x^4 - 10x^2y^2 + 25y^4$ *Resp.:* $(x^2 - 5y^2)^2$
26. $4x^2 - 4x + 1$ *Resp.:* $(2x - 1)^2$
27. $x^4 - 4x^2 + 4$ *Resp.:* $(x^2 - 2)^2$
28. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 4x$ *Resp.:* $x(x - 2)(x^2 + 2)$
29. $x^3 - 10x^2 + 3x - 30$ *Resp.:* $(x - 10)(x^2 + 3)$
30. $x^2 - 7x + 12$ *Resp.:* $(x - 3)(x - 4)$

Calcular o m.d.c.:

31. $x^2 - 9$ e $x^2 + 6x + 9$ *Resp.:* $x + 3$
32. $x^2 + 2x - 3$ e $x^2 + 7x + 12$ *Resp.:* $x + 3$
33. $x^2 - 4x + 4$ e $x^2 + 3x - 10$ *Resp.:* $x - 2$
34. $4x^2 - 4x - 80$; $2x^2 - 18x + 40$ e $2x^2 - 24x + 70$ *Resp.:* $2x - 10$
35. $x^2 + 12x - 45$ e $x^2 + 9x - 36$ *Resp.:* $x - 3$

Calcular o m.m.c.:

36. $a^2 + ab$ e $ab + b^2$ *Resp.:* $ab(a + b)$
37. $4x^2 - 4x - 80$ e $2x^2 - 18x + 40$ *Resp.:* $4(x - 5)(x^2 - 16)$
38. $x^2 + 5x$ e $x^2 + 2x - 15$ *Resp.:* $x(x - 3)(x + 5)$
39. $x^2 - 4$; $x^2 + 4x + 4$ e $x - 2$ *Resp.:* $(x + 2)^2 (x - 2)$
40. $x + 1$; $2x - 2$ e $2x - 6$ *Resp.:* $2(x^3 - 3x^2 - x + 3)$

VI — FRAÇÕES LITERAIS. PROPRIEDADES E OPERAÇÕES

32. Definições. Fração algébrica é o quociente indicado de duas expressões algébricas, quando a divisão não é exata. Ex.:

$$\frac{3x^2 + 5x + 1}{7x + 5}$$

De um modo geral, dadas duas expressões algébricas A e B, o quociente da divisão de A por B, será a fração $\frac{A}{B}$.

Assim, por definição, a fração $\frac{A}{B}$ é a expressão algébrica, cujo produto por B é igual a A, isto é,

$$\frac{A}{B} \times B = A$$

Podemos, portanto, concluir que, dada uma fração, *tôda expressão*, cujo produto pelo denominador fôr igual ao numerador, é equivalente à fração dada, isto é, tem valor numérico igual ao da fração para qualquer sistema de valôres das letras. Sendo E uma expressão algébrica, *inteira* ou fracionária, se tivermos:

$$E \times B = A,$$

concluiremos:

$$E = \frac{A}{B}.$$

33. Propriedade das frações.

> **Multiplicando ou dividindo os dois têrmos de uma fração pela mesma expressão, diferente de zero, obtêm-se uma fração eqüivalente.**

DEMONSTRAÇÃO.

Seja a fração $\frac{a}{b}$ e m uma expressão diferente de zero, vamos provar que

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$$

Realmente, multiplicando a primeira fração, $\frac{a}{b}$, por bm temos:

$$\frac{a}{b} \times bm = \left(\frac{a}{b} \times b\right) \times m = am$$

Assim, $\frac{a}{b}$ é uma expressão cujo produto pelo denominador bm é am, logo $\frac{a}{b}$ é equivalente à fração $\frac{am}{bm}$, isto é,

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$$

o que demonstra a propriedade quanto à multiplicação.

Da igualdade:

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} \quad \text{resulta:} \quad \frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$$

ficando demonstrada a propriedade em relação à divisão.

A propriedade tem duas aplicações: *simplificação e redução ao mesmo denominador.*

34. Simplificação. Simplificar uma fração é transformá-la em outra eqüivalente de têrmos mais simples, isto é, de menor grau.

Quando a fração eqüivalente obtida tem os têrmos de menor grau possível a simplificação recebe o nome particular de *redução à expressão mais simples.*

A simplificação só é possível quando os dois têrmos têm fatôres comuns, caso em que, aplicando a propriedade das frações, dividimos os dois têrmos pelos mesmos fatôres.

Exemplos:

1.º) Simplificar a fração $\frac{10a^3bx^2}{25ab^2x}$

Os dois têrmos têm como fatôr comum o monômio $5abx$; dividindo-os por êsse monômio, obtemos:

$$\frac{10a^3bx^2}{25ab^2x} = \frac{2a^2x}{5b}$$

2.º) Simplificar a fração $\frac{x^2 - 1}{x^2 + x}$.

Decompondo os dois têrmos em fatôres, temos:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x(x + 1)}$$

Suprimindo o fator comum $x + 1$, obtém-se:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x} = \frac{x - 1}{x}$$

35. Redução ao mesmo denominador. Sejam as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ e m uma expressão algébrica divisível por b e d, isto é,

$$m = bq$$
$$m = dq'$$

sendo q e q' expressões inteiras. Multiplicando os dois têrmos da primeira fração por q e os da segunda por q', obteremos as frações eqüivalentes:

$$\frac{aq}{bq} \text{ e } \frac{cq'}{dq'} \quad \text{ou} \quad \frac{aq}{m} \text{ e } \frac{cq'}{m}$$

Assim, as frações dadas são transformadas em duas eqüivalentes do mesmo denominador m.

Esta transformação é denominada *redução ao mesmo denominador.*

A expressão m deve ser, de preferência, o m.m.c. dos denominadores. Podemos, pois, concluir a regra para reduzir frações ao mesmo denominador:

> **Acha-se o m.m.c. dos denominadores e multiplicam-se os dois têrmos de cada fração, pelo quociente da divisão do m.m.c. encontrado pelo denominador correspondente.**

Exemplos:

1.º) Reduzir ao mesmo denominador $\frac{5a}{3b^2}$, $\frac{3x}{5ab}$, $\frac{2b}{a^2}$.

O m.m.c. dos denominadores é $15a^2b^2$ e os quocientes das divisões pelos denominadores são, respectivamente, $5a^2$, $3ab$ e $15b^2$.

As frações eqüivalentes do mesmo denominador são:

$$\frac{25a^3}{15a^2b^2}, \quad \frac{9abx}{15a^2b^2} \quad \text{e} \quad \frac{30b^3}{15a^2b^2}$$

2.º) Reduzir ao mesmo denominador $\frac{3}{x+1}, \frac{5}{x-1}, \frac{7x+2}{x^2-1}$.

O m.m.c. dos denominadores é x^2-1 e os quocientes respectivos são $x-1$, $x+1$ e 1; assim, as frações eqüivalentes serão:

$$\frac{3(x-1)}{x^2-1}, \quad \frac{5(x+1)}{x^2-1} \quad \text{e} \quad \frac{7x+2}{x^2-1}$$

ou

$$\frac{3x-3}{x^2-1}, \quad \frac{5x+5}{x^2-1} \quad \text{e} \quad \frac{7x+2}{x^2-1}$$

36. Adição e subtração de frações.

Primeiro caso: ***As frações dadas têm o mesmo denominador.*** Da regra de divisão de polinômios podemos concluir:

$$\frac{A+B-C}{D} = \frac{A}{D} + \frac{B}{D} - \frac{C}{D}$$

Inversamente, temos: $\frac{A}{D} + \frac{B}{D} - \frac{C}{D} = \frac{A+B-C}{D}$, isto é:

> **Para adicionar ou subtrair frações que têm o mesmo denominador, efetuam-se as operações indicadas com os numeradores e conserva-se o denominador comum.**

Exemplos:

1.º) $\frac{7x}{3} - \frac{5x}{3} + \frac{2x}{3} = \frac{7x-5x+2x}{3} = \frac{4x}{3}$

2.º) Da mesma forma, temos:

$$\frac{5x-7}{2a} + \frac{x+3}{2a} - \frac{4x-5}{2a} = \frac{5x-7+x+3-4x+5}{2a} = \frac{2x+1}{2a}$$

Segundo caso: ***As frações têm denominadores diferentes.*** Neste caso reduziremos as frações ao mesmo denominador e aplicaremos, em seguida, a regra do primeiro caso.

Exemplos:

1.º) Efetuar: $\frac{3x-7}{3x} - \frac{7x-3}{15x} + \frac{17}{30}$

Reduzindo as frações ao mesmo denominador e aplicando a regra do primeiro caso, obtemos:

$$\frac{3x-7}{3x} - \frac{7x-3}{15x} + \frac{17}{30} = \frac{30x-70}{30x} - \frac{14x-6}{30x} + \frac{17x}{30x} =$$

$$= \frac{30x-70-14x+6+17x}{30x} = \frac{33x-64}{30x}$$

2.º) Efetuar: $\frac{x+1}{x-3} + \frac{x+2}{x+3} - \frac{5x+4}{x^2-9}$

O m.m.c. dos denominadores é x^2-9. Os quocientes das divisões pelos denominadores são, respectivamente, $x+3$, $x-3$ e 1; assim, temos:

$$\frac{(x+1)(x+3)}{x^2-9} + \frac{(x+2)(x-3)}{x^2-9} - \frac{5x+4}{x^2-9} =$$

$$= \frac{x^2+4x+3+x^2-x-6-5x-4}{x^2-9} = \frac{2x^2-2x-7}{x^2-9}$$

3.º) Efetuar: $\frac{1}{1-x} + \frac{3}{1+x} + \frac{2x}{x^2-1}$.

Antes de reduzir as frações ao mesmo denominador é necessário ordenar todos os denominadores, segundo as potências crescentes ou todos segundo as decrescentes, quando não estão.

Para ordenar todos os denominadores segundo as potências crescentes, multipliquemos os dois têrmos da terceira fração por -1 e obteremos:

$$\frac{1}{1-x}+\frac{3}{1+x}-\frac{2x}{1-x^2}$$

O m.m.c. é $1-x^2$ e os quocientes são $1+x$, $1-x$ e 1, respectivamente.

Reduzindo ao mesmo denominador e efetuando as operações, temos:

$$\frac{1+x}{1-x^2}+\frac{3-3x}{1-x^2}-\frac{2x}{1-x^2}=\frac{1+x+3-3x-2x}{1-x^2}=\frac{4-4x}{1-x^2}$$

Simplificando o resultado:

$$\frac{4-4x}{1-x^2}=\frac{4(1-x)}{(1-x)(1+x)}=\frac{4}{1+x}$$

A soma é $\frac{4}{1+x}$.

37. Expressões mistas. Chama-se *expressão mista* a soma de uma expressão inteira com uma fração.

Exemplo: $5x+8+\frac{37}{x-3}$.

A expressão inteira pode ser considerada com denominador 1 e reduzida ao mesmo denominador, $x-3$, da fração dada. Assim:

$$5x+8+\frac{37}{x-3}=\frac{(5x+8)(x-3)}{x-3}+\frac{37}{x-3}$$

Efetuando, em seguida, a soma, a expressão mista fica transformada numa fração:

$$5x+8+\frac{37}{x-3}=\frac{(5x+8)(x-3)+37}{x-3}$$

Daí, a regra:

> **Para converter uma expressão mista em fração, multiplica-se a expressão inteira pelo denominador, ao produto adiciona-se o numerador, e escreve-se o mesmo denominador da parte fracionária.**

Exemplo: Reduzir à fração $x-4+\frac{5}{x-1}$.

Aplicando a regra, obtemos:

$$x-4+\frac{5}{x-1}=\frac{(x-4)(x-1)+5}{x-1}=\frac{x^2-5x+4+5}{x-1}=\frac{x^2-5x+9}{x-1}$$

38. Multiplicação. Seja achar o produto de $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$. Representemos o produto procurado por p:

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=p$$

Multiplicando os dois membros por bd:

$$\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)\times bd=b\times d\times p$$

ou, de acôrdo com a propriedade associativa:

$$\left(\frac{a}{\cancel{b}}\times\cancel{b}\right)\times\left(\frac{c}{\cancel{d}}\times\cancel{d}\right)=b\times d\times p.$$

Assim, concluímos:

$$a\times c=b\times d\times p$$

donde, dividindo por $b\times d$:

$$p=\frac{a\times c}{b\times d}$$

Daí, a regra:

> **O numerador do produto é o produto dos numeradores e o denominador, o produto dos denominadores das frações dadas.**

Exemplos:

1.º) $$\frac{4ab^3}{3cd} \times \frac{2b}{5c} = \frac{8ab^4}{15c^2d}.$$

2.º) $$\frac{x-y}{x^2+y^2} \times \frac{x+y}{4x} = \frac{x^2-y^2}{4x^3+4xy^2}.$$

3.º) Se um numerador e um denominador tiverem um fator comum, podemos suprimí-lo, antes de efetuar a multiplicação, o que evita a simplificação posterior do resultado. Seja determinar o produto:

$$\frac{x^2-y^2}{4xy} \times \frac{6y}{x+y}$$

Fatorando os têrmos das frações e suprimindo os fatôres comuns, temos:

$$\frac{(x-y)\cancel{(x+y)}}{\cancel{4xy}\,2x} \times \frac{\cancel{6y}\,3}{\cancel{x+y}} = \frac{3\,(x-y)}{2x}$$

39. Divisão. Seja determinar o quociente da divisão de $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$. Representemos o quociente procurado por q.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = q$$

Como o dividendo é o produto do divisor pelo quociente, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \times q$$

Multiplicando os dois membros por $\frac{d}{c}$:

$$\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{\cancel{c}}{\cancel{d}} \times \frac{\cancel{d}}{\cancel{c}} \times q$$

donde

$$q = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Daí, a regra:

> **Para dividir uma fração por outra, multiplica-se o dividendo pelo inverso do divisor.**

Exemplos:

1.º) $$\frac{4ax^2}{3by} : \frac{5ax}{9by^2} = \frac{4ax^2}{3by} \times \frac{9by^2}{5ax} = \frac{4x}{1} \times \frac{3y}{5} = \frac{12xy}{5}$$

2.º) $$\frac{x^2-2x-15}{x^2+x-6} : \frac{x^2-5x}{2x-4} = \frac{(x-5)(x+3)}{(x-2)(x+3)} \times \frac{2(x-2)}{x(x-5)} = \frac{2}{x}.$$

3.º) $$\left(1+\frac{1}{a-1}\right) : \left(1-\frac{1}{a+1}\right) = \frac{a}{a-1} : \frac{a}{a+1} = \frac{a}{a-1} \times \frac{a+1}{a} = \frac{a+1}{a-1}.$$

40. Frações complexas. A fração em que um ou ambos os têrmos são fracionários denomina-se *fração complexa*.

Exemplo: $$\frac{x + \frac{xy}{x-y}}{x - \frac{xy}{x+y}}$$

Quando, num cálculo, interferem frações complexas, é necessário simplificá-las, efetuando a divisão do numerador pelo denominador.

Exemplo:

$$\frac{1+\frac{y}{x-y}}{1-\frac{y}{x+y}} - \frac{x+\frac{y^2}{x}}{x-\frac{y^2}{x}} = \frac{\frac{x}{x-y}}{\frac{x}{x+y}} - \frac{\frac{x^2+y^2}{x}}{\frac{x^2-y^2}{x}} =$$

$$= \frac{x+y}{x-y} - \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2} - \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{2xy}{x^2-y^2}$$

EXERCÍCIOS

Simplificar as frações:

1. $\dfrac{45b^2x^3}{27a^2b^3x}$ *Resp.:* $\dfrac{5x^2}{3a^2b}$

2. $\dfrac{5x+10}{3x+6}$ *Resp.:* $\dfrac{5}{3}$

3. $\dfrac{x^2-9}{x^2+6x+9}$ *Resp.:* $\dfrac{x-3}{x+3}$

4. $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$ *Resp.:* $\dfrac{a+b}{a-b}$

5. $\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-5x-14}$ *Resp.:* $\dfrac{x-5}{x-7}$

6. $\dfrac{5a^3b+10a^2b^2}{3a^2b^2+6ab^3}$ *Resp.:* $\dfrac{5a}{3b}$

7. $\dfrac{x^2-4}{3x^3-6x^2+x-2}$ *Resp.:* $\dfrac{x+2}{3x^2+1}$

8. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+4}$ *Resp.:* $\dfrac{x-2}{x-4}$

9. $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+5x-6}$ *Resp.:* $\dfrac{x+4}{x+6}$

10. $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3+3x^2+x+3}$ *Resp.:* $\dfrac{x-1}{x+3}$

Reduzir ao mesmo denominador:

11. $\dfrac{3x-2}{5xy}$; $\dfrac{2x+3}{12x^2y}$ *Resp.:* $\dfrac{36x^2-24x}{60x^2y}$; $\dfrac{10x+15}{60x^2y}$

12. $\dfrac{2a}{3x}$; $\dfrac{5}{9ax}$ *Resp.:* $\dfrac{6a^2}{9ax}$; $\dfrac{5}{9ax}$

13. $\dfrac{1}{x-2}$; $\dfrac{1}{x+3}$ *Resp.:* $\dfrac{x+3}{x^2+x-6}$; $\dfrac{x-2}{x^2+x-6}$

14. $\dfrac{3x}{x+1}$; $\dfrac{x^2}{x-1}$; $\dfrac{2x^3}{x^2-1}$ *Resp.:* $\dfrac{3x^2-3x}{x^2-1}$; $\dfrac{x^3+x^2}{x^2-1}$; $\dfrac{2x^3}{x^2-1}$

15. $\dfrac{x+1}{x-3}$; $\dfrac{7x^2}{x^2-5x+6}$; $\dfrac{x-1}{x-2}$

Resp.: $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$; $\dfrac{7x^2}{x^2-5x+6}$; $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-5x+6}$

16. $\dfrac{1}{x^2-4x-5}$; $\dfrac{1}{x^2-6x+5}$ *Resp.:* $\dfrac{x-1}{x^3-5x^2-x+5}$; $\dfrac{x+1}{x^3-5x^2-x+5}$

17. $\dfrac{1}{5+x}$; $\dfrac{1}{5-x}$ *Resp.:* $\dfrac{5-x}{25-x^2}$; $\dfrac{5+x}{25-x^2}$

18. $\dfrac{1}{x^2-y^2}$; $\dfrac{1}{x^2+xy}$; $\dfrac{1}{x^2-xy}$

Resp.: $\dfrac{x}{x(x+y)(x-y)}$; $\dfrac{x-y}{x(x+y)(x-y)}$; $\dfrac{x+y}{x(x+y)(x-y)}$

Efetuar as adições e subtrações:

19. $\dfrac{2a-3}{4a}+\dfrac{3a+2}{12a}-\dfrac{23a-30}{24a}$ *Resp.:* $\dfrac{16-5a}{24a}$

20. $\dfrac{7xy+1}{x^2y^2}-\dfrac{3y^2-2}{xy^3}-\dfrac{4x^2-7}{x^3y}$ *Resp.:* $\dfrac{2x^2+xy+7y^2}{x^3y^3}$

21. $\dfrac{3a-2b}{ab}+\dfrac{4b-5c}{ac}+\dfrac{7}{a}$ *Resp.:* $\dfrac{3ac+4b^2}{abc}$

22. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+3}$ *Resp.:* $\dfrac{2x+1}{x^2+x-6}$

23. $\dfrac{3x}{x+1}+\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{2x^3}{x^2-1}$ *Resp.:* $\dfrac{3x-x^2}{1+x}$

24. $\dfrac{1}{4x-4}+\dfrac{2}{3x-3}$ *Resp.:* $\dfrac{11}{12x-12}$

25. $\dfrac{2x+1}{2x-1}-\dfrac{4}{4x^2-1}-\dfrac{2x-1}{2x+1}$ *Resp.:* $\dfrac{4}{2x+1}$

26. $\dfrac{3a+b}{4a-b}-\dfrac{3a-b}{4a+b}+\dfrac{10ab-b^2}{b^2-16a^2}$ *Resp.:* $\dfrac{b}{4a-b}$

27. $\dfrac{1}{6x+6}+\dfrac{1}{3x-3}-\dfrac{1}{2-2x^2}$ *Resp.:* $\dfrac{3x+4}{6x^2-6}$

28. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{2x-2}+\dfrac{3}{2x-6}$ *Resp.:* $\dfrac{x^2-x+6}{x^3-3x^2-x+3}$

29. $\dfrac{2}{(x-1)^2}-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}$ *Resp.:* $\dfrac{6x-2}{x^3-x^2-x+1}$

30. $\dfrac{x+1}{x-3}+\dfrac{7x^2}{x^2-5x+6}-\dfrac{x-1}{x-2}$ *Resp.:* $\dfrac{7x^2+3x-5}{x^2-5x+6}$

31. $\dfrac{1}{x^2-4x-5}-\dfrac{1}{x^2-6x+5}$ *Resp.:* $\dfrac{-2}{x^3-5x^2-x+5}$

32. $\dfrac{1}{x^2-y^2}+\dfrac{1}{x^2+xy}+\dfrac{1}{x^2-xy}$ *Resp.:* $\dfrac{3}{(x+y)(x-y)}$

Reduzir as expressões mistas a frações:

33. $3x + 3 + \dfrac{14}{x - 3}$ *Resp.:* $\dfrac{3x^2 - 6x + 5}{x - 3}$

34. $x + 3 - \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$ *Resp.:* $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 4}{x^2 + 1}$

35. $a - b + \dfrac{2b^2}{a + b}$ *Resp.:* $\dfrac{a^2 + b^2}{a + b}$

36. $2x - 4 - \dfrac{3}{x - 3}$ *Resp.:* $\dfrac{2x^2 - 10x + 9}{x - 3}$

37. $x - 7 + \dfrac{23}{x + 4}$ *Resp.:* $\dfrac{x^2 - 3x - 5}{x + 4}$

38. $3x + 6 - \dfrac{9}{2x - 3}$ *Resp.:* $\dfrac{6x^2 + 3x - 27}{2x - 3}$

39. $a + x - \dfrac{a^2 + x^2}{a + x}$ *Resp.:* $\dfrac{2ax}{a + x}$

40. $\dfrac{2 - 3x}{5} - 2 + x$ *Resp.:* $\dfrac{2x - 8}{5}$

41. $x - 5 + \dfrac{12 - 21x}{x^2 - 4x + 1}$ *Resp.:* $\dfrac{x^3 - 9x^2 + 7}{x^2 - 4x + 1}$

42. $x^2 + 2x - 1 - \dfrac{7}{2x + 1}$ *Resp.:* $\dfrac{2x^3 + 5x^2 - 8}{2x + 1}$

Efetuar as multiplicações:

43. $\dfrac{4x^2 - 9}{4 - x^2} \times \dfrac{2 + x}{2x - 3}$ *Resp.:* $\dfrac{2x + 3}{2 - x}$

44. $\dfrac{2x + 3}{4a} \times \dfrac{4a^2 - 6a}{12x + 18}$ *Resp.:* $\dfrac{2a - 3}{12}$

45. $\dfrac{x^2 - 4y^2}{xy + 2y^2} \times \dfrac{2y}{x - 2y}$ *Resp.:* 2

46. $x^2\left(1 - \dfrac{x}{x + y}\right) + y^2\left(1 - \dfrac{y}{x + y}\right)$ *Resp.:* xy

47. $\dfrac{xy + 1}{x} \times \left(y - \dfrac{1}{x}\right) \times \left(\dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{x^2y^4 - y^2}\right)$ *Resp.:* 1

48. $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 4x - 5} \times \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 3x - 10} \times \dfrac{x^2 - 25}{x + 2}$ *Resp.:* $x + 2$

49. $\dfrac{9 - x^2}{5x - 10} \times \dfrac{5}{x - 3}$ *Resp.:* $\dfrac{x + 3}{2 - x}$

50. $\left(\dfrac{x^2}{y^2} - 1\right)\left(\dfrac{x}{x - y} - 1\right)$ *Resp.:* $\dfrac{x + y}{y}$

51. $\left(\dfrac{1 + x}{1 - x} - \dfrac{1 - x}{1 + x}\right) x^2 \times \left(\dfrac{1}{x^2} - 1\right)$ *Resp.:* $4x$

52. $\left(x - \dfrac{x - 1}{x + 1}\right)\left(x + \dfrac{x + 1}{x - 1}\right) \times \left(1 - \dfrac{1 - x}{1 + x^2}\right)$ *Resp.:* $\dfrac{x^3 + x}{x - 1}$

Efetuar as divisões:

53. $\dfrac{8a^2b}{3x} : \dfrac{4a}{3b}$ *Resp.:* $\dfrac{2ab^2}{x}$

54. $\dfrac{128a^4}{81b^3} : \dfrac{32a^2}{9b}$ *Resp.:* $\dfrac{4a^2}{9b^2}$

55. $\dfrac{a + 3}{a - 3} : \dfrac{2a + 6}{3a - 9}$ *Resp.:* $\dfrac{3}{2}$

56. $\dfrac{45x^3y^2}{7z^2} : \dfrac{9y^2}{28x^2z}$ *Resp.:* $\dfrac{20x^5}{z}$

57. $\dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - 25} : \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 5x}$ *Resp.:* $\dfrac{x^2}{x^2 - 8x + 15}$

58. $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 5x + 4} : \dfrac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 4x + 3}$ *Resp.:* $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 16}$

59. $\dfrac{a^2 - 4a}{a + 2} : \dfrac{3a - 6}{2}$ *Resp.:* $\dfrac{2a}{3}$

60. $\dfrac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 1} : \dfrac{3x + 9}{x^2 - 4x + 3}$ *Resp.:* $\dfrac{x^2 - 9}{3x + 3}$

Simplificar as expressões:

61. $\left(1 - \dfrac{y}{x}\right)\left(1 + \dfrac{y^2}{x^2 - y^2}\right)$ *Resp.:* $\dfrac{x}{x + y}$

62. $\dfrac{x^2 + xy}{x^2 - 9} : \dfrac{x + y}{x^2 - 2x - 3} \times \dfrac{x + 3}{x + 1}$ *Resp.:* x

63. $\frac{a^2+a}{b^2+b} : \left(\frac{b^2-b}{a^2-a} : \frac{b^2-1}{a^2-1}\right)$ *Resp.:* $\frac{a^2}{b^2}$

64. $\frac{1+m}{m} : \left(m^2 + \frac{1}{m}\right) \times \left(m - 1 + \frac{1}{m}\right)$ *Resp.:* $\frac{1}{m}$

65. $\left(1 - x + \frac{1-x}{1+x}\right) : \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-x^2}\right)$ *Resp.:* $(1-x)^2$

66. $\left(a - \frac{a+ab}{a+b}\right) : \left(a + \frac{a-ab}{a+b}\right)$ *Resp.:* $\frac{a-1}{a+1}$

67. $\dfrac{x + \frac{y-x}{1+xy}}{1 - \frac{xy-x^2}{1+xy}}$ *Resp.:* y

68. $\dfrac{a+b+c}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \times \dfrac{ab+ac+bc}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}}$ *Resp.:* $a^2b^2c^2$

69. $\dfrac{\frac{x}{2} - 3}{\frac{x+3}{5} - \frac{2x-9}{15}}$ *Resp.:* $\frac{15\,(x-6)}{2\,(x+18)}$

70. $\dfrac{\frac{x-3}{2} - \frac{x-3}{4}}{x - \frac{x+1}{4}}$ *Resp.:* $\frac{x-3}{3x-1}$

UNIDADE III

Equações e Inequações do primeiro grau com uma incógnita. Sistemas lineares com duas incógnitas.

I — EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU COM UMA INCÓGNITA

1. Equação. Identidade. Igualdade é o conjunto de duas expressões ligadas pelo sinal $=$.

Assim,

$$x + 5 = 8 - x \text{ e } 6 + 2 = 3^2 - 1$$

são *igualdades.*

As expressões que figuram na igualdade chamam-se *membros.*

As igualdades entre expressões algébricas são de duas espécies: *identidades* e *equações.*

A igualdade é *identidade,* quando as duas expressões têm o mesmo valor numérico, quaisquer que sejam os valôres atribuídos às letras que nelas figuram. A identidade representa-se também com o sinal $\equiv$.

Todos os produtos notáveis são identidades. Assim:

1.º) $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

2.º) $(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

3.º) $(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$

A igualdade é *equação*, quando é verdadeira apenas para valôres particulares de certas letras que nela figuram e se denominam *incógnitas*. A equação é, portanto, uma igualdade *condicional*.

Exemplos:

1.º) A igualdade $x = 5$ é uma equação, porque só é verificada atribuindo-se a x o valor 5.

2.º) A igualdade $3x + 1 = 2x$ é uma equação, porque só se verifica para $x = -1$.

3.º) $x^2 - x = 6$ é uma equação, porque só se verifica para os valores particulares 3 e -2 da incógnita x.

Os valôres da incógnita, que verificam a equação, denominam-se *soluções* ou *raízes*. No exemplo anterior, 3 e -2 são as raízes da equação.

Resolver uma equação é achar suas raízes ou soluções.

Emprega-se o têrmo *raiz* para as equações de uma incógnita e *solução* para mais de uma.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Verificar se a igualdade

$$x^2 + 3 = 5x - 1$$

é uma identidade ou uma equação.

Atribuindo a x o valor 1, os dois membros assumem o mesmo valor 4. A igualdade se verifica para $x = 1$.

Atribuindo a x o valor 2, os dois membros assumem, respectivamente, os valôres 7 e 9. A igualdade não se verifica para $x = 2$ e é, portanto, uma equação.

2. Verificar se o número 2 é raiz da equação

$$4x - 5 = 3(x - 1)$$

Substituindo x por 2, os dois membros assumem o mesmo valor 3; logo, o número 2 é raiz.

3. Verificar se o número 3 é raiz da equação

$$5x - 4 = 2x + 1$$

Substituindo x por 3, temos:

primeiro membro: $5 \times 3 - 4 = 11$;
segundo membro: $2 \times 3 + 1 = 7$.

Assim, os dois membros têm valôres numéricos diferentes e o número 3 não é raiz.

2. Classificação das equações. As equações algébricas classificam-se segundo critérios diversos:

1.º) Quanto ao número de soluções podem ser:

determinadas, quando o número de soluções é limitado;
indeterminadas, quando admitem uma infinidade de soluções.

Assim, a equação

$$x^2 - 9 = 0$$

que admite, apenas, duas raízes, -3 e 3, é determinada; enquanto que a equação

$$x + y = 23$$

que admite uma infinidade de soluções, é indeterminada.

2.º) Quanto às operações que afetam à incógnita podem ser *racionais* ou *irracionais*, *inteiras* ou *fracionárias*.

a) *racionais*, quando não contêm incógnita submetida a radical ou elevada a expoente fracionário.

Exemplo:

$$\sqrt{3} : x + \frac{2x}{3} = 1$$

b) *irracionais*, quando contêm incógnita submetida a radical ou elevada a um expoente fracionário.

Exemplos: $\sqrt{x^2-1} + x^2 = 3$; $x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} = 2$

c) *inteiras*, quando não contêm incógnita em denominador ou com expoente negativo.

Exemplo: $\dfrac{2x}{3} + \dfrac{x}{2} = 3$

d) *fracionárias*, quando contêm incógnita em denominador ou com expoente negativo.

Exemplos: $\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} = 1$; $x^{-2} + x^{-1} + 3 = 0$

3.º) Quanto à natureza dos coeficientes, as equações podem ser *numéricas* ou *literais*. A equação

$$3x - 7 = 2x + 1$$

é *numérica*, por serem numéricos todos os coeficientes; a equação $3x^2 + bx + 5 = 0$

é *literal*, porque tem um coeficiente literal.

4.º) As equações algébricas *racionais* e *inteiras* classificam-se, ainda, pelo grau e pelo número de incógnitas. Assim, a equação $3x^2 - 7x + 8 = 0$

é do 2.º grau, de uma incógnita; a equação

$$x^2y - 3xy = 5y^2$$

é do 3.º grau, de duas incógnitas.

3. Equações equivalentes. Quando duas equações admitem as mesmas raízes, isto é, quando tôdas as soluções da primeira satisfazem a segunda e, reciprocamente, as da segunda satisfazem a primeira, as equações dizem-se equivalentes.

A resolução algébrica das equações racionais de uma incógnita, consiste em transformá-las, sucessivamente, em equações equivalentes mais simples, até se obter a equivalente da forma $x = a$, cuja raiz, a, é evidente.

Estas transformações e, portanto, a resolução, baseiam-se em dois princípios de equivalência.

> **Primeiro princípio. Somando-se ou subtraindo-se a mesma expressão aos dois membros de uma equação obtém-se uma equação equivalente.**

A equação $x + 2 = 7$, por exemplo, é equivalente a $x = 7 - 2$, obtida subtraindo duas unidades aos dois membros; ambas têm a raiz cinco.

Aplicação. Seja a equação:

$$3x - 2y = 5$$

Aplicando-lhe o primeiro princípio, somemos $2y$ aos dois membros; obteremos, então, a equação eqüivalente

$$3x - 2y + 2y = 5 + 2y$$

ou, reduzindo os têrmos semelhantes:

$$3x = 5 + 2y$$

Observemos que o têrmo $-2y$, do primeiro membro da equação dada, figura no segundo membro da equação equivalente com o sinal $+$.

Seja, ainda, a equação $3x + 2y = 5$.

Subtraindo $2y$ dos dois membros obtemos a equivalente

$$3x + 2y - 2y = 5 - 2y$$

ou, reduzindo:

$$3x = 5 - 2y$$

Observaremos que o têrmo $+2y$, do primeiro membro da equação dada, figura no segundo membro da equivalente com o sinal $-$, e concluiremos:

> **Pode-se transpor um têrmo de um membro para outro de uma equação, trocando seu sinal.**

> **Segundo princípio. Multiplicando-se ou dividindo-se ambos os membros de uma equação por um número diferente de zero ou por uma expressão que não se torne nula e tenha sentido, obtém-se uma equação equivalente.**

Assim, a equação $2x - 3 = 7$ é equivalente à equação $6x - 9 = 21$, obtida multiplicando os dois membros por 3; a raiz comum é cinco. Da mesma forma a equação

$$3x = 12$$

é equivalente à $x = 4$, obtida dividindo os dois membros por três; a raiz comum é 4.

APLICAÇÕES.

PRIMEIRA. ***Simplificação das equações.*** Quando os *coeficientes* de uma equação admitem um divisor comum, podemos dividí-los por êsse divisor, de acôrdo com o segundo princípio, o que conduz a uma equação mais simples. Assim, dada a equação $12x^2 - 36x = 18$

se dividirmos os dois membros por 6, obteremos a equação eqüivalente mais simples,

$$2x^2 - 6x = 3$$

SEGUNDA. ***Podemos trocar o sinal de todos os têrmos de uma equação,*** pois isto corresponde a multiplicar os dois membros por -1. A equação

$$-x + 2 = -4$$

por exemplo, pode ser escrita

$$x - 2 = 4$$

TERCEIRA. ***Eliminação dos denominadores.*** Podemos substituir uma equação de coeficientes fracionários por outra eqüivalente de coeficientes inteiros. A esta transformação denominamos *eliminação dos denominadores.*

Seja a equação

$$\frac{x-1}{3} + \frac{2x+3}{4} = \frac{1}{2}$$

De acôrdo com o segundo princípio, se multiplicarmos os dois membros pelo m.m.c. dos denominadores, que é 12, obteremos a eqüivalente

$$\frac{12(x-1)}{3} + \frac{12\,(2x+3)}{4} = \frac{12}{2}$$

Como o multiplicador é divisível por todos os denominadores, por ser seu m.m.c., todos os têrmos podem ser simplificados, e resulta a equação eqüivalente de coeficientes inteiros: $4(x-1) + 3(2x+3) = 6$

Daí concluímos que, pràticamente, para expelir os denominadores e alcançarmos a equação eqüivalente de coeficientes inteiros, podemos utilizar a regra:

Calcula-se o m.m.c. dos denominadores, e multiplica-se cada um dos numeradores pelo quociente da divisão do m.m.c. encontrado pelo denominador correspondente.

Exemplos:

1.º) Expelir os denominadores da equação

$$\frac{2\,(x-1)}{5} - \frac{2x+3}{3} = \frac{5}{6}$$

O m.m.c. dos denominadores é 30. Os quocientes das divisões do m.m.c. pelos denominadores são 6, 10 e 5; resulta a equação eqüivalente

$$12(x-1) - 10(2x+3) = 25$$

cujos coeficientes são inteiros.

2.º) Expelir os denominadores da equação

$$2 - \frac{5x+1}{4} = \frac{3x-5}{6}$$

O m.m.c. dos denominadores é 12. Como o denominador do primeiro têrmo é a unidade, os quocientes das divisões do m.m.c. pelos denominadores são 12, 3 e 2; temos, assim, a equação eqüivalente de coeficientes inteiros:

$$12 \times 2 - 3(5x+1) = 2(3x-5)$$

3.º) Expelir os denominadores da equação:

$$3 - \frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+1}$$

A equação é fracionária e o m.m.c. dos denominadores é $x^2 - 1$ ou $(x+1)(x-1)$. Multiplicando-se os dois membros por $x^2 - 1$, resulta a equação inteira:

$$3(x^2-1) - 2x^2 = x(x+1) - x(x-1)$$

4. Resolução de equações inteiras do primeiro grau.

Exemplos:

1.º) Resolver a equação $4x - 10 = 3x - 5$.

Transpondo os têrmos que contêm incógnita para o primeiro membro, e os que não a contêm para o segundo, obtemos a equação eqüivalente:

$$4x - 3x = 10 - 5$$

ou, reduzindo os têrmos semelhantes:

$$x = 5$$

Verificação:

Primeiro membro: $4 \times 5 - 10 = 20 - 10 = 10.$

Segundo membro: $3 \times 5 - 5 = 15 - 5 = 10.$

2.º) Resolver a equação:

$$\frac{3x-2}{2} - \frac{2x+1}{3} = \frac{4x-6}{5}$$

Eliminando os denominadores, cujo m.m.c. é 30, obtemos:

$$15(3x-2) - 10(2x+1) = 6(4x-6)$$

efetuando as multiplicações, temos:

$$45x - 30 - 20x - 10 = 24x - 36;$$

transpondo os têrmos que contêm incógnita para o primeiro membro e os que não a contém para o segundo, obtemos

$$45x - 20x - 24x = -36 + 30 + 10$$

ou, reduzindo os têrmos semelhantes:

$$x = 4$$

Verificação:

Primeiro membro: $\frac{3 \times 4 - 2}{2} - \frac{2 \times 4 + 1}{3} = \frac{10}{2} - \frac{9}{3} = 5 - 3 = 2$

Segundo membro: $\frac{4 \times 4 - 6}{5} = \frac{10}{5} = 2$

3.º) Resolver a equação

$$\frac{x+2}{2} = 4 - \frac{2x+1}{9}$$

Eliminando os denominadores, cujo m.m.c. é 18, temos:

$$9(x+2) = 18 \times 4 - 2(2x+1)$$

ou

$$9x + 18 = 72 - 4x - 2$$

transpondo os têrmos, obtemos:

$$9x + 4x = 72 - 2 - 18$$

ou

$$13x = 52$$

dividindo os dois membros por 13, temos, finalmente,

$$x = \frac{52}{13} = 4$$

Regra. Para resolver uma equação do primeiro grau com uma incógnita, observa-se a regra:

1) *expelem-se os denominadores, se os houver* (2.º princípio);
2) *removem-se os parênteses, efetuando as multiplicações indicadas;*
3) *transpõem-se os têrmos que contêm a incógnita para o primeiro membro e os independentes da incógnita para o segundo* (1.º princípio);
4) *reduzem-se os têrmos semelhantes em cada membro;*
5) *dividem-se ambos os membros pelo coeficiente da incógnita* (2.º princípio).

Para verificar a solução, substitui-se a raiz encontrada nos dois membros da equação dada; os valores numéricos devem ser iguais.

5. Resolução de equações fracionárias. Na resolução das equações fracionárias procede-se como nas equações inteiras. É, no entanto, indispensável verificar se a raiz da equação inteira anula algum denominador.

Em caso afirmativo, a equação fracionária não tem raiz, pois o denominador *zero* não tem sentido.

Exemplos:

1.°) Resolver a equação:

$$\frac{1+x}{x+3} = \frac{2}{3}$$

O m.m.c. dos denominadores é $3(x+3)$.

A eliminação dos denominadores dará a equação inteira do primeiro grau

$$3(1+x) = 2(x+3)$$

Resolvendo a equação inteira, temos:

$$3+3x = 2x+6$$

donde $$x = 3$$

Como o valor 3, da incógnita, não anula o denominador, concluímos que a equação fracionária dada admite a raiz 3.

2.°) Resolver a equação:

$$\frac{2x-1}{x-3} - \frac{x+1}{x+3} = \frac{x^2+21}{x^2-9}$$

O m.m.c. dos denominadores é $(x-3)(x+3)$ ou x^2-9.
Eliminando os denominadores, temos:

$$(2x-1)(x+3)-(x+1)(x-3) = x^2+21$$

Efetuando as operações:

$$2x^2+5x-3-x^2+2x+3 = x^2+21$$

transpondo os têrmos e reduzindo os semelhantes, resulta a equação do primeiro grau:

$$7x = 21$$

donde $$x = 3$$

Como 3 anula o denominador $x-3$, não é raiz da equação fracionária dada; *esta não tem, pois, solução.*

3.°) Resolver a equação:

$$\frac{3x+1}{2x-1} + \frac{5}{1-4x^2} = \frac{3x+2}{2x+1}$$

Ordenando os denominadores segundo as potências decrescentes temos:

$$\frac{3x+1}{2x-1} - \frac{5}{4x^2-1} = \frac{3x+2}{2x+1}$$

O m.m.c. dos denominadores que é $(2x-1)(2x+1)$ ou $4x^2-1$.

Eliminando os denominadores, temos:

$$(3x+1)(2x+1)-5 = (3x+2)(2x-1)$$

ou $$6x^2+5x+1-5 = 6x^2+x-2$$

transpondo e reduzindo:

$$4x = 2$$

donde $$x = \frac{1}{2}$$

O valor $\frac{1}{2}$ anula o denominador $2x-1$; logo, *a equação fracionária é impossível.*

6. **Equações literais.** As equações literais são resolvidas como as numéricas, consistindo a redução dos têrmos semelhantes, que contêm a incógnita, em *colocá-la em evidência.*

Exemplos:

1.°) Resolver a equação:

$$ax+b = bx+a$$

Transpondo os têrmos, obteremos:

$$ax-bx = a-b$$

Pondo x em evidência:

$$(a-b)x = a-b$$

Temos, assim:

$$x = \frac{a-b}{a-b} = 1$$

2.°) Resolver a equação:

$$\frac{21a+bx}{5a} + \frac{11b-ax}{3b} = 10$$

Supondo $ab \neq 0$ (1)

podemos eliminar os denominadores, cujo m.m.c. é $15ab$, resultado:

$$3b(21a + bx) + 5a(11b - ax) = 150ab$$

ou

$$63ab + 3b^2x + 55ab - 5a^2x = 150ab$$

transpondo os têrmos e reduzindo os semelhantes:

$$(3b^2 - 5a^2)x = 32ab$$

donde:

$$x = \frac{32ab}{3b^2 - 5a^2}$$

3.º) Resolver a equação:

$$\frac{x + a}{x - a} - \frac{x + b}{x - b} = \frac{a - b}{(x - a)(x - b)}$$

Para que a equação tenha sentido, é necessário que x seja diferente de a e b; feita esta hipótese, obteremos, eliminando os denominadores:

$$(x + a)(x - b) - (x - a)(x + b) = a - b$$

ou

$$x^2 + (a - b)x - ab - x^2 + (a - b)x + ab = a - b$$

donde resulta:

$$2(a - b)x = a - b$$

e

$$x = \frac{a - b}{2(a - b)} = \frac{1}{2}$$

7. Discussão. Tôda equação do primeiro grau pode ser escrita com a forma

$$ax + b = 0.$$

Basta, para isso, eliminar os denominadores e transpor convenientemente os têrmos, como vimos no estudo da resolução.

Para obter o valor de x, devemos dividir os dois membros por a, o que exige ser a diferente de zero. Podemos, pois, distinguir dois casos.

PRIMEIRO CASO: $a \neq 0$.

Conclui-se, transpondo b e dividindo os dois membros por a:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Neste caso a equação tem uma única solução.

SEGUNDO CASO: $a = 0$.

Neste caso, o primeiro membro da equação dada, se reduz a b, qualquer que seja o valor de x. Assim, se b *fôr diferente de zero*, a equação será *impossível*; ao contrário, se b *fôr igual a zero*, a equação será verificada para qualquer valor de x, isto é, será *indeterminada*. Nesta última hipótese, a igualdade dada é realmente uma *identidade*.

RESUMO

$a \neq 0$ Uma solução: $x = -\frac{b}{a}$

$$a = 0 \begin{cases} b \neq 0, \text{ impossibilidade.} \\ b = 0, \text{ identidade.} \end{cases}$$

Exemplos:

1.º) Resolver a equação

$$12(x - 10) - 10x = 15(3 - x) + 17x$$

Efetuando as multiplicações, temos:

$$12x - 120 - 10x = 45 - 15x + 17x$$

reduzindo os têrmos semelhantes:

$$2x - 120 = 45 + 2x$$

transpondo os têrmos, obtemos:

$$2x - 2x = 120 + 45$$

ou

$$0 \,.\, x = 165$$

Temos: $a = 0$ e $b \neq 0$

Logo, ***a equação é impossível.***

2.º) Resolver a equação

$$\frac{x}{20} - \frac{2x - 5}{15} = 2 - \frac{20 + x}{12}$$

Eliminando os denominadores, cujo m.m.c. é 60, temos:

$$3x - 4(2x - 5) = 120 - 5(20 + x)$$

ou

$$3x - 8x + 20 = 120 - 100 - 5x$$

transpondo os têrmos e reduzindo-os, obtemos:

$$0 \cdot x = 0$$

Temos: $a = 0$ e $b = 0$

A igualdade é identidade.

EXERCÍCIOS

Resolver as equações:

1. $4x - 8 = 3x - 5$ — *Resp.:* 3
2. $5x + 4 = 2x + 25$ — *Resp.:* 7
3. $7x - 5 = 22 - 2x$ — *Resp.:* 3
4. $13x - (2x + 3) = 19$ — *Resp.:* 2
5. $5x - (x - 8) = 2x + 6$ — *Resp.:* -1
6. $7 - 3(3 - x) = 31$ — *Resp.:* 11
7. $5(7x - 2) - 10x = 15 + 2(x - 5)$ — *Resp.:* $\frac{15}{23}$
8. $6x - 17 = 13(x - 1) - 4$ — *Resp.:* 0
9. $15 - 3(x - 1) = 6 - 2(2x - 5)$ — *Resp.:* -2
10. $(x - 7)(x - 8) = (x - 5)(x - 4) - 18$ — *Resp.:* 9
11. $(x - 3)^2 + (x + 5)^2 = 2(x^2 + 23)$ — *Resp.:* 3
12. $6x - 19 = 7 \times (x - 2) - 5$ — *Resp.:* 0
13. $\frac{x}{2} - 84 = 105 - x$ — *Resp.:* 126
14. $\frac{x}{3} - 60 = x - 51$ — *Resp.:* $-13\,{}^1/_2$
15. $x + 4 = \frac{x}{2} + 10$ — *Resp.:* 12
16. $\frac{x}{3} + 10 = x - \frac{11}{3}$ — *Resp.:* 20,5

17. $\frac{3x}{7} - 5 = x - \frac{3}{7}$ — *Resp.:* -8
18. $\frac{x}{4} - \frac{x - 1}{3} = \frac{1}{12}$ — *Resp.:* 3
19. $\frac{17x - 2}{14} = \frac{57x + 14}{56}$ — *Resp.:* 2
20. $\frac{3(x + 1)}{4} - \frac{2(x - 1)}{3} = 1\frac{7}{12}$ — *Resp.:* 2
21. $3x - \frac{4x - 1}{5} = 6 - \frac{2 - 5x}{6}$ — *Resp.:* 4
22. $\frac{x - 2}{2} - \frac{x - 3}{3} + \frac{x - 4}{4} = \frac{2}{3}$ — *Resp.:* 4
23. $\frac{3x - 5}{8} - \frac{4(2x - 7)}{9} = 1\frac{19}{24} - \frac{5(x - 2)}{9}$ — *Resp.:* 10
24. $\frac{x + 11}{15} - \frac{4 - x}{9} = \frac{5x - 89}{12} - 4$ — *Resp.:* 49
25. $2\left(5 - \frac{x}{3}\right) - 6\left(\frac{x}{2} - 1\right) = \frac{x}{6} - 7$ — *Resp.:* 6
26. $\frac{23 + x}{8} - x = 2 - \left(\frac{1}{4} + 2x\right)$ — *Resp.:* -1
27. $4 - \frac{1 - 3x}{12} = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{x}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(11 - \frac{x}{2}\right)$ — *Resp.:* 3
28. $\frac{1}{3}(x - 1) - \frac{1}{5}(x + 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x - 4)$ — *Resp.:* -2
29. $4[8x - 5(7 - 4x) + 9(6 - 3x) + 12x] = 7[20x - 2(7x - 10) - 2]$ — *Resp.:* 5
30. $\frac{5x}{2} - 2 = \frac{3x}{4} - \frac{3}{8}$ — *Resp.:* $\frac{13}{14}$
31. $\frac{3x}{8} - \frac{5}{6} = \frac{2x}{5} - 1$ — *Resp.:* $6\frac{2}{3}$
32. $\frac{x + 4}{6} - 7 = x - \frac{1 - 2x}{5}$ — *Resp.:* $-\frac{184}{37}$

33. $\frac{x+7}{11} - \frac{2x-9}{3} + \frac{2x-7}{4} = \frac{3x+7}{12}$ *Resp.*: 4

34. $\frac{x-10}{5} - \frac{12-x}{10} = \frac{x-2}{10}$ *Resp.*: 15

35. $\frac{2x-4}{5} + \frac{x}{4} + \frac{x+\frac{1}{2}}{3} = 11\frac{1}{6}$ *Resp.*: 12

36. $\frac{x+2}{2} = 4 - \frac{2x+1}{2}$ *Resp.*: $x = \frac{5}{3}$

37. $2 - \frac{5x+1}{4} = \frac{3x-5}{6}$ *Resp.*: $x = \frac{31}{21}$

38. $\frac{x-4}{2} - \frac{2x-5}{4} + \frac{x+\frac{1}{4}}{3} = \frac{2}{3}$ *Resp.*: 4

39. $\frac{2x-7}{10} = \frac{x+9}{30} - \frac{4-x}{6}$ *Resp.*: Impossível

40. $2(2x+5) - \frac{14x+5}{6} = \frac{5x+1}{3} + 8\frac{5}{6}$ *Resp.*: Indeterminada

41. $\frac{x}{4} + 1 - \frac{x}{12} = x + \frac{4-5x}{6}$ *Resp.*: Impossível

42. $\frac{3x}{20} - \frac{2x-5}{15} + \frac{5}{2} = \frac{x}{10} + \frac{34-x}{12}$ *Resp.*: Indeterminada

Resolver as equações fracionárias:

43. $\frac{x}{x+1} = \frac{3x}{x+2} - 2$ *Resp.*: $-\frac{4}{5}$

44. $\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{3x+5}{x^2-1}$ *Resp.*: Impossível ($x = -1$)

45. $\frac{3x+1}{2x-1} - \frac{5x-4}{1-2x} = 5\frac{1}{3}$ *Resp.*: $x = \frac{7}{8}$

46. $\frac{5}{3x-6} + \frac{3}{2x-4} = \frac{19}{6}$ *Resp.*: $x = 3$

47. $\frac{2x+1}{2x-1} + \frac{8}{1-4x^2} = \frac{2x-1}{2x+1}$ *Resp.*: $x = 1$

48. $\frac{2x+1}{6x-4} + \frac{8-9x^2}{27x^2-12} = \frac{8}{9x+6}$ *Resp.*: $x = 2$

49. $\frac{x-1}{x-3} - \frac{x+1}{x+3} = \frac{11x+8}{3x^2-27}$ *Resp.*: $x = 8$

50. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{2}{x-3}$ *Resp.*: $x = \frac{5}{3}$

51. $\frac{2x-1}{x-3} - \frac{x+1}{x+3} = 1$ *Resp.*: $x = -\frac{9}{7}$

52. $\frac{3x+1}{2x-1} + \frac{3x+2}{2x+1} = 3 - \frac{1}{4x^2-1}$ *Resp.*: Impossível $\left(x = -\frac{1}{2}\right)$

53. $\frac{\frac{x}{2} - 3}{x+18} = \frac{1}{5}$ *Resp.*: $x = 22$

54. $\frac{3}{2x+6} + \frac{3}{9-3x} = \frac{x-7}{x^2-9}$ *Resp.*: $x = -1$

55. $\frac{x+2}{x-3} + \frac{x-2}{x+3} = 2$ *Resp.*: Impossível

56. $\frac{\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}}{\frac{1+x}{1-x} - 1} = \frac{2}{5-x}$ *Resp.*: $x = 2$

Resolver e discutir as equações literais:

57. $ax + b = bx + a$ *Resp.*: $a \neq b$, uma sol. $x = 1$; $a = b$, identidade

58. $(x+a)(a-3) = (x-3)(3+a)$ *Resp.*: $\frac{a^2+9}{6}$

59. $\frac{2bx}{a^2-b^2} - \frac{x}{a-b} = \frac{5a}{a+b}$ *Resp.*: $x = -5a$, para $a \neq b$

60. $4 - \frac{x+a}{a} = \frac{x-a}{4a}$ *Resp.*: $a \neq 0$, $x = \frac{13a}{5}$

61. $\dfrac{x+a}{a} = \dfrac{x}{a-x} + \dfrac{x-a}{a}$ *Resp.:* $a \neq 0,\ x = \dfrac{2a}{3}$

62. $ax - 5b = 2bx + 3a$ *Resp.:* $a \neq 2b,\ x = \dfrac{3a+5b}{a-2b}$

63. $\dfrac{\dfrac{x+a}{x-a} - \dfrac{x-a}{x+a}}{\dfrac{x+a}{x-a} + 1} = 4$ *Resp.:* $x = -\dfrac{a}{2}$

64. $\dfrac{a}{b}\left(1 - \dfrac{a}{x}\right) + \dfrac{b}{a}\left(1 - \dfrac{b}{x}\right) = 1$ *Resp.:* $x = a + b$

65. $\dfrac{a^2 + 4a}{x^2 + x - a^2 + a} - \dfrac{1}{x - a + 1} = \dfrac{a}{x + a}$ *Resp.:* $x = 2a$

66. $\dfrac{x}{b+a} - \dfrac{x}{a} = \dfrac{b}{b-a}$ *Resp.:* $\begin{cases} a \neq 0 \text{ e } b \neq \pm a \begin{cases} b \neq 0,\ x = \dfrac{a(a+b)}{a-b} \\ b = 0 \text{ — indeterminada} \end{cases} \\ a = 0 \text{ ou } b = \pm a \text{ — impossível} \end{cases}$

67. $ax - \dfrac{2}{a} = 2(x + 1) - 3x$ *Resp.:* $\begin{cases} a \neq 0 \begin{cases} a \neq -1 \text{ — uma solução } x = \dfrac{2}{a} \\ a = -1 \text{ — indeterminada} \end{cases} \\ a = 0 \text{ — impossível} \end{cases}$

68. Pode o número 1 ser raiz da equação:

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{3x+5}{x^2-1}$$

Por que?

Resp.: Não; porque anula o m.m.c. dos denominadores.

69. Qual o número que se deve escrever no lugar de m na equação

$$2x + 6 = m - 10x,$$

para que a mesma seja eqüivalente à equação:

$$x + 3 = 7 - 5x?$$

Resp.: 14

70. Qual o valor que deve ter m na equação

$$\frac{4x+1}{3} - \frac{2x+3}{6} = mx + \frac{1}{2}$$

para que a mesma seja impossível? *Resp.:* 1

II — DESIGUALDADES. INEQUAÇÕES

8. Desigualdades. Comparação de números relativos. Diz-se que um número a é maior que b e escreve-se:

$$a > b$$

quando a diferença $a - b$ é um número positivo.

Diz-se que a é menor que b e escreve-se:

$$a < b$$

quando a diferença $a - b$ é um número negativo.

Assim:

$7 > 5$ porque a diferença $7 - 5$, ou 2, é um número positivo;

$3 > -15$ porque $3 - (-15) = +18$;

$-1 > -27$ porque $-1 - (-27) = +26$ e

$-5 < 0$ porque $-5 - 0 = -5$.

As relações da forma $a > b$ e $a < b$ são denominadas ***desigualdades***; a é o primeiro membro e b o segundo membro da desigualdade. O menor membro fica sempre do lado do vértice do ângulo indicador de desigualdade.

Duas desigualdades dizem-se do *mesmo sentido*, quando têm o mesmo sinal de desigualdade; em caso contrário dizem-se de *sentidos opostos*.

Assim:

$15 > 7$ e $-3 > -18$ são desigualdades do mesmo sentido;

$-6 < 0$ e $17 > 9$ são desigualdades de sentidos opostos.

Das definições resultam, imediatamente, as conseqüências:

1.ª) De dois números positivos, o maior é o que tem maior valor absoluto;

2.ª) De dois números negativos, o maior é o que tem menor valor absoluto;

3.ª) Todo número positivo é maior que zero e todo número negativo é menor que zero.

Assim, para indicar que um número a é positivo escreve-se:

$$a > 0$$

e, para indicar que é negativo:

$$a < 0$$

4.ª) Qualquer número positivo é maior que qualquer negativo.

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Uma relação de desigualdade entre dois números pode ser indicada de duas maneiras, como $7 > 3$ ou $3 < 7$.

2.ª) Para indicar que o número a é maior que b, escerve-se indiferentemente:

$$a > b \text{ ou } a - b > 0$$

e, ao contrário, para a menor que b, escreve-se:

$$a < b \text{ ou } a - b < 0$$

9. Desigualdades condicionais. Inequações. Dadas duas expressões algébricas A e B, a relação de desigualdade

$$A > B$$

traduz ser o valor numérico de A maior que o de B.

Da mesma forma a desigualdade

$$A < B$$

traduz ser o valor numérico de A menor que o de B.

As desigualdades que têm para membros expressões algébricas, são de duas espécies.

1.ª) Desigualdades que são verdadeiras quaisquer que sejam os valores atribuídos às letras nelas contidas, isto é, são *incondicionais*.

Assim, as desigualdades

$$a^2 + b^2 > -1$$
$$x^2 + 1 > 0$$

que são verdadeiras para quaisquer valôres de a e b ou de x, são *incondicionais*.

2.ª) Desigualdades que são verificadas, apenas, para determinados valôres das letras incógnitas nelas contidas.

Tais desigualdades são denominadas *condicionais* ou ***inequações*** e os valôres da incógnita que lhes satisfazem, são as *soluções*.

Assim, a desigualdade

$$x - 1 > 3$$

que só se verifica para valôres de x maiores que 4, é uma inequação. Qualquer número maior que 4 é uma solução.

Duas inequações dizem-se *eqüivalentes*, quando são verificadas pelos mesmos valôres das incógnitas, isto é, quando admitem as mesmas soluções. Assim,

$$2x - 4 > 2 \quad \text{e} \quad x - 2 > 1$$

que são ambas satisfeitas para valôres de x maiores que 3, são *eqüivalentes*.

As inequações classificam-se como as equações, podendo ser racionais ou irracionais, inteiras ou fracionárias.

10. Propriedades das desigualdades.

I) ***Propriedade transitiva.***

Se a é maior do que b e b maior do que c, a é maior do que c.

Realmente, de $a > b$ e $b > c$, conclui-se, por definição:

$$a - b > 0$$
$$b - c > 0$$

E, como a soma de dois números positivos é positiva, resulta:

$$(a - b) + (b - c) > 0$$

ou

$$a - b + b - c > 0$$

ou ainda;

$$a - c > 0$$

Como a diferença é positiva, decorre, por definição:

$$a > c$$

II) **Somando ou subtraindo o mesmo número aos dois membros de uma desigualdade, resulta uma desigualdade do mesmo sentido.**

Seja a desigualdade $a > b$

ou

$$a - b > 0$$

Adicionando ao número $a - b$ o número $c - c$ ou zero, o que não o altera, conclui-se:

$$a - b + c - c > 0 \qquad (1)$$

ou

$$(a + c) - (b + c) > 0$$

donde resulta, por definição:

$$a + c > b + c$$

ficando demonstrada a propriedade em relação à adição.

A desigualdade (1) pode ainda ser escrita:

$$(a - c) - (b - c) > 0$$

donde:

$$a - c > b - c$$

o que demonstra a propriedade, quanto à subtração.

Exemplos:

De $7 > -5$, conclui-se: $7+8 > -5+8$ ou $15 > 3$.

De $-4 < -2$, conclui-se: $-4-5 < -2-5$ ou $-9 < -7$.

Aplicação. *Qualquer têrmo pode ser transposto de um para outro membro da desigualdade, desde que seja trocado seu sinal.*

Seja a inequação

$$4x - 3 > 5$$

Adicionando 3 aos dois membros, resulta:

$$4x > 5 + 3$$

III) **Multiplicando-se ou dividindo-se, pelo mesmo número, diferente de zero, os dois membros de uma desigualdade, resulta uma desigualdade do mesmo sentido, se o número fôr positivo, e de sentido contrário, se êle fôr negativo.**

Seja a desigualdade: $a > b$

donde se deduz, por definição,

$$a - b > 0$$

Sendo $a - b$ um número positivo, sua multiplicação, por um número positivo, dará ainda produto positivo, e, por um número negativo, dá-lo-á negativo, assim, tem-se:

para m positivo: $am - bm > 0$

para m negativo: $am - bm < 0$

Resulta, portanto:

para m positivo: $am > bm$

para m negativo: $am < bm$

Da mesma forma será demonstrada a propriedade para as desigualdades com o sinal $<$ e, também, em relação à divisão.

Aplicações.

1.ª) *Pode-se trocar os sinais de todos os têrmos de uma desigualdade desde que se inverta seu sentido, pois isto corresponde a multiplicar os dois membros por* -1.

2.ª) *Pode-se eliminar os denominadores numéricos de uma desigualdade inteira de coeficientes fracionários, multiplicando os dois membros pelo m.m.c. dos denominadores.*

Exemplo: Seja a desigualdade

$$\frac{x}{2} - \frac{5x - 1}{6} < \frac{4}{3}$$

Multiplicando-se os dois membros por 6 que é positivo, resulta a inequação do mesmo sentido:

$$3x - 5x + 1 < 8$$

11. Operações com as desigualdades.

1.ª) ***Adição.*** *Adicionando-se, membro a membro, desigualdades do mesmo sentido, resulta uma desigualdade do mesmo sentido.*

Sejam as desigualdades: $a > b$
$c > d$

donde se conclui: $a - b > 0$
$c - d > 0$

Como a soma de números positivos é positiva, tem-se:

$$(a - b) + (c - d) > 0$$

ou $a + c - b - d > 0$

ou, ainda: $(a + c) - (b + d) > 0$

donde, finalmente $a + c > b + d$

O raciocínio é análogo para as desigualdades com o sinal $<$.

OBSERVAÇÃO. Quando as desigualdades dadas têm sentidos contrários, o resultado da adição, membro a membro, não tem sentido fixo, podendo mesmo ser uma igualdade. Não é, pois, permitido adicionar desigualdades de sentidos opostos.

Exemplos:

1.º) De $7 > 3$
e $8 < 9$ resulta: $7 + 8 > 3 + 9$ ou $15 > 12$

2.º) De $4 > 1$
e $3 < 9$ resulta: $4 + 3 < 1 + 9$ ou $7 < 10$

3.º) De $7 > 3$
e $2 < 6$ resulta: $7 + 2 = 3 + 6$ ou $9 = 9$

2.ª) ***Subtração.*** *Subtraindo, membro a membro, desigualdades de sentidos contrários, resulta uma desigualdade do sentido da que serviu como minuendo.*

Sejam as desigualdades: $a > b$
$c < d$

Conclui-se, por definição: $a - b > 0$
$d - c > 0$

A soma dos números positivos $a - b$ e $d - c$ será positiva; assim:

$$a - b + d - c > 0$$

ou $(a - c) - (b - d) > 0$

donde, finalmente: $a - c > b - d$

OBSERVAÇÃO. Não é permitido subtrair desigualdades do mesmo sentido, pois o resultado não tem sentido fixo, e pode, mesmo, ser uma igualdade.

3.ª) ***Multiplicação.*** *Multiplicando, membro a membro, desigualdades do* mesmo sentido *e de* membros positivos, *resulta uma desigualdade do mesmo sentido.*

Sejam as desigualdades:

$$a > b$$
$$c > d$$

Como os números a, b, c, d, são, por hipótese, positivos, conclui-se, multiplicando os dois membros da primeira por c e os da segunda por b:

$$ac > bc$$
$$bc > bd$$

e, portanto: $ac > bd$

OBSERVAÇÃO. Se os membros não forem todos positivos, o sentido do produto não fica fixado, e pode, mesmo, resultar uma igualdade. Não é, pois, permitido, multiplicar desigualdades de sentidos opostos ou que tenham membros negativos.

Exemplos:

1.º) De $5 > 3$
e $-3 > -5$ resulta: $-3 \times 5 = -5 \times 3$ ou $-15 = -15$

2.º) De $-7 < 3$
e $-2 < -1$ resulta: $14 > -3$.

4.ª) **Divisão.** *Dividindo-se, membro a membro, desigualdades de* sentidos contrários *e de* membros positivos, *resulta uma desigualdade do mesmo sentido da que serviu de dividendo.*

Sejam as desigualdades: $a > b$
$c < d$

Conclui-se: $a > b$
$d > c$

e, de acôrdo com a propriedade anterior:

$$ad > bc$$

Dividindo os dois membros da última desigualdade pelo produto dc, que é positivo, por hipótese, conclui-se:

$$\frac{ad}{dc} > \frac{bc}{dc}$$

donde, finalmente: $$\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$$

Quanto à divisão, faremos observação análoga à da multiplicação.

12. Resolução de inequações inteiras do primeiro grau. Para resolver uma inequação são utilizados os princípios anteriormente estudados, de modo análogo ao processo de cálculo empregado na resolução das equações.

Exemplos:

1.º) Resolver a inequação

$$\frac{x+3}{6} - \frac{x-2}{4} > \frac{x-2}{8}$$

Eliminando os denominadores, cujo m.m.c. é 24, resulta a inequação de mesmo sentido:

$$4x + 12 - 6x + 12 > 3x - 6$$

transpondo os têrmos e reduzindo os semelhantes:

$$4x - 6x - 3x > -6 - 12 - 12$$

ou $$-5x > -30$$

dividindo os dois membros por -5, obtém-se:

$$x < 6$$

Conclui-se: *Qualquer valor de x menor que 6 convém à inequação dada.*

Observe-se que resolver uma inequação é determinar uma cota superior ou inferior aos valôres que a incógnita pode receber. No exemplo dado, foi determinada a cota superior 6.

2.º) Resolver a inequação:

$$x - \frac{2}{3} > \frac{2x-1}{2} + 5$$

Eliminando os denominadores, obtém-se:

$$6x - 4 > 6x - 3 + 30$$

ou $$0x > 31$$

Conclui-se:

A inequação é impossível, pois não há valor de x, cujo produto por zero seja maior que 31.

13. Sistemas de inequações de uma só incógnita. Duas ou mais inequações formam sistema, quando há valôres de x, que lhes satisfazem simultâneamente; em caso contrário, dizem-se *incompatíveis*.

Na resolução dos sistemas há dois casos a considerar: ou as cotas são tôdas da mesma natureza, isto é, *ambas inferiores* ou *ambas superiores*, ou uma é superior e outra inferior.

PRIMEIRO CASO. ***Cotas**: ambas superiores, ou ambas inferiores.* Neste caso, as inequações são sempre compatíveis, considerando-se apenas a menor cota, se forem tôdas superiores; ou a maior, se forem tôdas inferiores.

Exemplos:

1.º) Determinar os valôres de x, que verificam simultâneamente as inequações:

$$\begin{cases} 5x - 8 < x \\ 3 - x > 4x - 17 \end{cases}$$

Resolvendo-as separadamente:

$$\begin{array}{r|r} 5x - 8 < x & 3 - x > 4x - 17 \\ 4x < 8 & -5x > -20 \\ x < 2 & x < 4 \end{array}$$

$$\boxed{x < 2}$$

As duas cotas são superiores, aproveitando a menor, conclui-se que *todos os valôres de* x *menores que* 2 *satisfazem simultâneamente às inequações.*

2.º) Determinar os valôres de x que verificam as inequações:

$$\begin{cases} 3x - 5 > 4 \\ 5 - 2x < 9 \end{cases}$$

Resolvendo-as obtém-se:

$$\begin{array}{r|r} 3x - 5 > 4 & 5 - 2x < 9 \\ 3x > 9 & -2x < 4 \\ x > 3 & x > -2 \end{array}$$

$$\boxed{x > 3}$$

As duas cotas são inferiores. Aproveitamos a maior e concluímos que *todos os valôres de* x *maiores que* 3 *satisfarão às inequações dadas.*

SEGUNDO CASO. ***Cotas**: uma inferior e outra superior.* Neste caso, às desigualdades satisfazem os valôres de x, compreendidos entre as cotas, ou serão incompatíveis, se as mesmas cotas forem contraditórias, isto é, se a superior fôr menor que a inferior.

Exemplos:

1.º) Seja o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{3x - 2}{2} < 5 \\[2ex] \dfrac{1 - x}{5} < \dfrac{x - 1}{4} \end{cases}$$

Resolvendo as duas desigualdades, obtém-se, sucessivamente,

$$\begin{array}{r|r} 3x - 2 < 10 & 4 - 4x < 5x - 5 \\ 3x < 12 & -9x < -9 \\ x < 4 & x > 1 \end{array}$$

$$\boxed{1 < x < 4}$$

A cota superior é maior que a inferior; os valôres de x, que satisfazem simultâneamente às desigualdades, devem estar compreendidos entre 1 e 4. Tem-se, então:

$$1 < x < 4$$

2.º) Seja o sistema:

$$\begin{cases} 17 - 3x < 12x - 133 \\ 17 + 3x < 26 \end{cases}$$

Resolvendo as duas desigualdades, obtém-se:

$$\begin{array}{r|r} -15x < -150 & 3x < 9 \\ x > 10 & x < 3 \end{array}$$

incompatíveis

14. Inequações fracionárias. *Primeiro exemplo:* Achar os valôres de x que tornam positiva a fração

$$\frac{5x - 10}{x + 4}$$

Os valôres procurados de x devem satisfazer à desigualdade

$$\frac{5x - 10}{x + 4} > 0$$

A fração é positiva quando os dois têrmos têm o mesmo sinal; logo, podemos considerar duas hipóteses:

1.ª) *Os dois têrmos são positivos.*

$$\begin{cases} 5x - 10 > 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases}$$

Teremos, então:

$$\begin{array}{r|r} 5x - 10 > 0 & x + 4 > 0 \\ 5x > 10 & \\ x > 2 & x > -4 \end{array}$$

$$\boxed{x > 2}$$

Todos os valôres de x maiores que 2, tornam positiva a fração dada.

2.ª) *Os dois têrmos são negativos.*

$$\begin{cases} 5x - 10 < 0 \\ x + 4 < 0 \end{cases}$$

Teremos:

$$\begin{array}{r|r} 5x - 10 < 0 & x + 4 < 0 \\ 5x < 10 & x < -4 \\ x < 2 & \end{array}$$

$$\boxed{x < -4}$$

Todos os valôres de x menores que -4, tornam positiva a fração.

Conclui-se, finalmente, que a fração é positiva para os valôres de x maiores que 2 ou menores que -4.

Segundo exemplo: Resolver a inequação fracionária:

$$\frac{3x - 2}{x + 2} < 2$$

Podemos reduzir ao tipo do exemplo anterior, transpondo o têrmo 2 e efetuando as operações. Teremos:

$$\frac{3x - 2}{x + 2} - 2 < 0$$

ou

$$\frac{x - 6}{x + 2} < 0$$

A última inequação traduz que o quociente da divisão de $x - 6$ por $x + 2$ deve ser negativo, o que exige serem os dois têrmos de sinais contrários; deve-se ter, então:

$$1) \quad \begin{cases} x - 6 > 0 \\ x + 2 < 0 \end{cases}$$

ou

$$2) \quad \begin{cases} x - 6 < 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases}$$

Resolvendo o primeiro sistema, obtém-se:

$$x > 6$$
$$x < -2$$

As inequações do primeiro sistema são incompatíveis, pois as cotas são contraditórias.

Resolvendo-se o segundo, obtém-se:

$$x < 6$$
$$x > -2$$

Conclui-se que à inequação fracionária dada satisfazem os valôres de x, menores que 6 e maiores que -2, isto é:

$$-2 < x < 6$$

Terceiro exemplo. Seja a inequação:

$$\frac{5x-3}{x+4} > 5$$

Transpondo o têrmo 5, resulta:

$$\frac{5x-3}{x+4} - 5 > 0$$

ou

$$\frac{5x-3-5x-20}{x+4} > 0$$

ou, ainda,

$$\frac{-23}{x+4} > 0$$

Para que o quociente seja positivo, é necessário que os têrmos tenham o mesmo sinal; como o dividendo -23 é negativo, conclui-se que:

$$x+4 < 0$$

donde

$$x < -4$$

Assim, à inequação convêm os valôres de x, menores que -4.

EXERCÍCIOS

1. Multiplicar por -3 os dois membros da inequação $x2 - 1 < 5 - x$. Verificar se o número 1 é solução da inequação dada e da transformada. *Resp.:* Sim

2. Dividir por -3 os dois membros da inequação $12 - 6x > 9x - 3$.

Resolver as inequações:

3. $4x + 10 < 15 + 3x$ — *Resp.:* $x < 5$
4. $5x + 4(x-2) < 20x - 2$ — *Resp.:* $x > -\frac{6}{11}$
5. $2(x-1) > 2x + 7$ — *Resp.:* Impossível
6. $2(x+1) + 5 > 2x + 3$ — *Resp.:* Incondicional
7. $x - 2(2x-1) > 3x + 2(x-3)$ — *Resp.:* $x < 1$

8. $\frac{y+3}{6} > 2 - \frac{4-3y}{2}$ — *Resp.:* $y < \frac{3}{8}$
9. $\frac{x+1}{3} - \frac{3x+1}{4} > \frac{x-3}{2}$ — *Resp.:* $x < \frac{19}{11}$
10. $\frac{3-2x}{16} > \frac{x}{6} - 2$ — *Resp.:* $x < 7{,}5$
11. $\frac{3x - \frac{1}{3}}{4} - \frac{1}{18} < \frac{\frac{x}{2} - 3}{3}$ — *Resp.:* $x < -\frac{31}{21}$
12. $1 - \frac{x+1}{2} > 0$ — *Resp.:* $x < 1$
13. $\frac{3x+7}{9} - \frac{5x+1}{18} < \frac{17}{6} - x$ — *Resp.:* $x < 2$
14. $5x - 4\frac{1}{3} + \frac{x}{15} < \frac{9}{25} - \frac{2x}{5}$ — *Resp.:* $x < \frac{176}{205}$
15. Achar os valôres de x que tornam negativa a fração $\frac{x+7}{x+2}$. *Resp.:* $-7 < x < -2$
16. Achar as frações ordinárias maiores que $\frac{1}{8}$ e menores que $\frac{1}{7}$, cujo numerador é 3. *Resp.:* $\frac{3}{22}$ e $\frac{3}{23}$

Achar os números inteiros que verificam os sistemas:

17. $\begin{cases} 6x - 2 > x \\ \frac{3x-2}{3} < 4 \end{cases}$ — *Resp.:* 1, 2, 3, 4

18. $\begin{cases} \frac{3(x-1)}{2} > x \\ \frac{1+x}{3} < 2 \end{cases}$ — *Resp.:* 4

Resolver os sistemas de inequações:

19. $\begin{cases} \frac{x}{8} + \frac{x}{2} < x + 5 + \frac{x}{4} \\ \frac{1}{8}(x+2) > \frac{1}{7}(x-2) \end{cases}$ — *Resp.:* $-8 < x < 30$

20. $\begin{cases} 3x - \dfrac{1}{4} > 20 - \dfrac{2x}{3} \\ 2(2x - 3) > 5x - \dfrac{3}{4} \end{cases}$ *Resp.:* Incompatíveis

21. $\begin{cases} \dfrac{3x}{5} - \dfrac{7x}{10} < 2 - 3x \\ \dfrac{2x - 3}{x + 1} < 2 \end{cases}$ *Resp.:* $-1 < x < \dfrac{20}{29}$

Resolver as inequações:

22. $3 - \dfrac{2}{x + 1} > 0$ *Resp.:* $x < -1$ ou $x > -\dfrac{1}{3}$

23. $(6x + 2)(2 - 3x) > 0$ *Resp.:* $-\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{2}{3}$

24. $(x + 3)(2x - 1) < 0$ *Resp.:* $-3 < x < 0,5$

25. $\dfrac{26}{x - 1} > 0$ *Resp.:* $x > 1$

26. $\dfrac{x^2 + 10x + 16}{x - 1} > 10$ *Resp.:* $x > 1$

27. $2 - \dfrac{x}{1 - x} < 1 - \dfrac{1}{x - 1}$ *Resp.:* $0 < x < 1$

28. $\dfrac{7x - 5}{8x + 3} > 4$ *Resp.:* $-\dfrac{17}{25} < x < -\dfrac{3}{8}$

29. Achar os valôres de x que tornam negativa a fração $\dfrac{7 - 2x}{x}$.

Resp.: $x < 0$ ou $x > 3,5$

30. Achar os valôres inteiros de x que tornam positiva a fração $\dfrac{15 - 3x}{3x - 2}$.

Resp.: 1, 2, 3 e 4

31. Achar os valôres inteiros de x que tornam positiva e própria a fração $\dfrac{2x + 1}{3}$. *Resp.:* 0

32. Achar os valôres de x que tornam a fração $\dfrac{2x - 3}{4}$ maior que 2 e menor que 6.

Resp.: $5,5 < x < 13,5$

33. Achar os valôres inteiros de x para os quais a fração $\dfrac{4}{2x - 3}$ é positiva e imprópria.

Resp.: 2 e 3

34. Achar o número de módulo inteiro que devemos somar aos dois têrmos da fração $^3/_7$, a fim de obter resultados negativos.

Resp.: -4, -5 e -6

35. Achar o menor valor inteiro e positivo de x que torna a fração $\dfrac{4}{2x - 3}$ negativa e menor que -3.

Resp.: 1

III — SISTEMAS LINEARES COM DUAS INCÓGNITAS

15. Equação com duas incógnitas. Uma equação com duas incógnitas tem uma infinidade de soluções. Realmente, consideremos a equação

$$5x + y = 16$$

Atribuindo à incógnita x um valor qualquer, 3, por exemplo, obteremos a equação com uma incógnita:

$$5 \times 3 + y = 16$$

donde resulta $y = 1$

Os valôres $x = 3$ e $y = 1$

verificam a equação e constituem, portanto, uma solução.

Como podemos atribuir à primeira incógnita tantos valôres quantos quisermos, concluímos que o número de soluções é *ilimitado*.

Para tornar mais simples a pesquisa dos valôres de y, que dependem dos atribuídos a x, podemos transpor o têrmo $5x$ para o segundo membro e escrever a equação com a forma

$$y = 16 - 5x$$

Dizemos, então, que a equação está ***resolvida em relação a y*** e teremos:

para $x = 1$ vem $y = 16 - 5 = 11$

para $x = 2$ vem $y = 16 - 10 = 6$ etc.

16. Sistema de equações simultâneas. Sistema de equações é um conjunto de duas ou mais equações que são satisfeitas para os mesmos valôres das incógnitas, isto é, que admitem pelo menos uma solução comum.

Consideremos as equações:

$$5x + y = 16$$
$$2x - 3y = 3$$

Cada uma delas admite, como vimos, uma infinidade de soluções. Se, entre as várias soluções, houver pelo menos uma solução comum, diremos que as duas equações formam um *sistema de equações simultâneas.*

No exemplo considerado, a primeira equação admite as soluções:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{etc.}$$

e a segunda as soluções:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{etc.}$$

As duas equações admitem a solução comum $x = 3$, $y = 1$ e formam, portanto, um sistema, cuja solução é: $x = 3$, $y = 1$.

Duas equações do primeiro grau que só admitem uma solução comum, formam um sistema ***determinado.*** A solução comum é a solução do sistema.

Se as equações admitirem uma infinidade de soluções comuns, o sistema denomina-se ***indeterminado.***

Duas ou mais equações que não admitem solução comum, são chamadas ***incompatíveis.*** As equações

$$2x + 3y = 15$$

e

$$2x + 3y = 23$$

por exemplo, são incompatíveis. Não há valôres de x e y que tornem o primeiro membro ao mesmo tempo igual a 15 e 23. Neste caso, diz-se que o sistema é ***impossível.***

Dois sistemas dizem-se eqüivalentes quando admitem as mesmas soluções.

17. Resolução dos sistemas de duas equações com duas incógnitas. Resolver um sistema é achar a solução comum das equações que o formam.

Exemplo: Consideremos o sistema

$$5x - 3y = 12$$
$$15 + 7y = 30 - 8y$$

em que a segunda equação tem apenas uma incógnita. É, portanto, satisfeita para um único valor de y, que já sabemos determinar:

$$7y + 8y = 30 - 15$$
$$15y = 15$$
$$y = 1$$

Como as equações formam sistema, o valor de y na primeira equação será também 1. Substituindo, então, y por 1 nessa equação, obteremos a equação de uma incógnita:

$$5x - 3 = 12$$

Resolvendo esta última equação, temos:

$$5x = 15$$

donde

$$x = 3$$

A solução do sistema é:

$$x = 3$$
$$y = 1$$

Assim, quando uma das equações tem uma só incógnita, começamos por resolvê-la; substituímos, em seguida, o valor obtido na outra equação.

Para resolver um sistema em que as duas equações têm as duas incógnitas, o transformaremos de modo que uma das equações contenha uma só incógnita, e o resolveremos como no exemplo anterior.

A transformação do sistema dado em outro *eqüivalente* em que uma das equações tenha uma só incógnita denomina-se ***eliminação***. São três os processos usuais de executar o método de eliminação.

I) *Eliminação por substituição.*

II) *Eliminação por adição.*

III) *Eliminação por comparação.*

18. Método de eliminação por substituição.
Exemplos:

1.°) Seja o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação em relação a x, obtemos:

$$x = \frac{8 - 3y}{2}$$

Substituindo êste valor de x na segunda, resulta a equação de uma incógnita:

$$5 \times \frac{8 - 3y}{2} - 2y = 1$$

Transformamos, assim, o sistema dado no eqüivalente:

$$\begin{cases} x = \dfrac{8 - 3y}{2} \\ 5 \times \dfrac{8 - 3y}{2} - 2y = 1 \end{cases}$$

onde a segunda equação tem apenas uma incógnita.

Resolvendo a segunda equação, temos sucessivamente:

$$\frac{40 - 15y}{2} - 2y = 1$$

$$40 - 15y - 4y = 2$$

$$-19y = -38$$

donde, finalmente:

$$y = 2$$

Substituindo êste valor na primeira equação do último sistema, temos:

$$x = \frac{8 - 3 \times 2}{2}$$

donde:

$$x = 1$$

A solução do sistema é, portanto:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Observemos que a resolução de um sistema comporta duas fases; a primeira consiste em transformar o sistema de modo a obter uma equação de uma incógnita e é denominada *eliminadora*; a segunda consiste em resolver sucessivamente, equações de *uma* incógnita e é denominada *resolutiva*.

2.°) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ 10x + y = 18 \end{cases}$$

Neste sistema é preferível resolver a segunda equação em relação a y, por ter essa incógnita coeficiente 1, o que evita o aparecimento de denominador; resulta, então:

$$y = 18 - 10x$$

Substituindo o valor de y na primeira equação temos:

$$5x - 3(18 - 10x) = 2$$

Obtemos, então, o sistema *eqüivalente*:

$$\begin{cases} y = 18 - 10x \\ 5x - 3(18 - 10x) = 2 \end{cases}$$

Resolvendo a segunda equação, temos:

$$5x - 54 + 30x = 2$$

transpondo e reduzindo os têrmos, resulta:

$$35x = 56$$

donde $$x = \frac{56}{35}$$

ou, simplificando: $$x = \frac{8}{5}$$

Substituindo êste valor de x na primeira equação do último sistema, temos:

$$y = 18 - 10 \times \frac{8}{5}$$

ou $$y = 18 - 16 = 2$$

A solução é: $x = \frac{8}{5}$, $y = 2$

19. Método de eliminação por adição.

Exemplos:

1.º) Seja resolver o sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 5x - 2y = 18 \end{cases}$$

em que a incógnita y tem coeficientes simétricos nas duas equações, e, portanto, será eliminada, desde que as adicionemos membro a membro. Efetuando a adição, resulta a equação.

$$8x = 32$$

Temos, assim, o sistema eqüivalente:

$$\begin{cases} 8x = 32 \\ 3x + 2y = 14 \end{cases}$$

donde, concluímos: $$x = \frac{32}{8} = 4$$

Substituindo êste valor na segunda equação:

$$3 \times 4 + 2y = 14$$

ou, transpondo e reduzindo: $2y = 2$

donde $$y = \frac{2}{2} = 1$$

A solução do sistema é: $x = 4$, $y = 1$.

2.º) Seja resolver o sistema:

$$\begin{cases} 7x + 2y = 15 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \;\Big|\; -1$$

em que a incógnita y tem coeficientes iguais nas duas equações.

Subtraindo, membro a membro, temos:

$$4x = 8$$

donde $$x = \frac{8}{4} = 2$$

Substituindo o valor de x na primeira equação, obtemos:

$$7 \times 2 + 2y = 15$$

ou, transpondo e reduzindo: $2y = 1$

donde, finalmente: $$y = \frac{1}{2}$$

A solução do sistema é: $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$.

3.º) Seja resolver o sistema: $$\begin{cases} 4x + 6y = 9 \\ 7x - 9y = 6 \end{cases} \;\Big|\; \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$$

Nenhuma das incógnitas tem coeficientes simétricos.

Neste caso, multiplicaremos prèviamente os dois membros das equações por fatôres tais que tornem simétricos os coeficientes de uma delas. Para isso, *determina-se o menor múltiplo comum dos coeficientes da incógnita a eliminar, e multiplicam-se os dois membros de cada equação pelo quociente da divisão dêsse m.m.c. pelo coeficiente da incógnita na mesma equação.*

O m.m.c. dos coeficientes de y é 18, os multiplicadores das equações são respectivamente 3 e 2, como se acham indicados à direita do traço vertical; temos, assim, o sistema eqüivalente:

$$12x + 18y = 27$$
$$14x - 18y = 12$$

Adicionando-as, membro a membro, e substituindo a segunda equação do sistema dado por essa soma, temos o sistema final eqüivalente:

$$\begin{cases} 26x = 39 \\ 4x + 6y = 9 \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação, obtemos:

$$\therefore \quad x = \frac{39}{26} = \frac{3}{2}$$

Substituindo êsse valor na segunda equação do sistema final, e resolvendo-a, resulta:

$$6 + 6y = 9 \;\therefore\; y = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

A solução é: $x = 1{,}5$ e $y = 0{,}5$.

4.º) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 26 \\ 6x - 11y = 2 \end{cases} \left|\begin{array}{c} 3 \\ -2 \end{array}\right.$$

Para reduzir a incógnita x ao mesmo coeficiente utilizaremos o menor múltiplo comum dos coeficientes 4 e 6, que é 12. Dividindo êste m.m.c. pelos coeficientes, encontramos, respectivamente, os quocientes 3 e 2; assim, multiplicando a primeira equação por 3 a e segunda por -2, obteremos o sistema:

$$12x + 15y = 78$$
$$-12x + 22y = -4$$

em que a incógnita x tem coeficientes simétricos.

Adicionando, membro a membro, as duas equações, temos:

$$37y = 74$$

donde

$$y = \frac{74}{37} = 2$$

Substituindo êste valor na primeira equação, resulta:

$$4x + 5 \times 2 = 26$$

donde

$$4x = 16$$

e

$$x = \frac{16}{4} = 4$$

A solução do sistema é: $x = 4$, $y = 2$.

20. Método de eliminação por comparação. Seja o sistema:

$$\begin{cases} 7x + 3y = 33 \\ 5x - 2y = 7 \end{cases}$$

Resolvendo as duas equações em relação a x, temos:

$$x = \frac{33 - 3y}{7}$$

$$x = \frac{7 + 2y}{5}$$

De acôrdo com o princípio de substituição, temos:

$$\frac{33 - 3y}{7} = \frac{7 + 2y}{5}$$

Formamos, assim, o sistema eqüivalente:

$$\begin{cases} x = \dfrac{33 - 3y}{7} \\[2ex] \dfrac{33 - 3y}{7} = \dfrac{7 + 2y}{5} \end{cases}$$

Resolvendo a segunda equação, obtemos:

$$5(33 - 3y) = 7(7 + 2y)$$

donde resulta:

$$165 - 15y = 49 + 14y$$

ou, transpondo e reduzindo: $-29y = -116$

donde, finalmente, $y = \dfrac{-116}{-29} = 4$

Substituindo êste valor na primeira equação do último sistema, temos:

$$x = \frac{33 - 3 \times 4}{7}$$

donde $x = \dfrac{21}{7} = 3$

A solução do sistema é: $x = 3$, $y = 4$.

O emprêgo do método de comparação só é vantajoso para os sistemas cujas equações já estão resolvidas em relação à mesma incógnita.

21. Sistema de equações de coeficientes fracionários.

Seja resolver o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{6} = \dfrac{59}{12} \\ \dfrac{x-11}{2} = 2 - \dfrac{7y-x}{6} \end{cases}$$

Antes de aplicar qualquer dos processos anteriores, devem ser eliminados os denominadores e transpostos os têrmos que contêm incógnita para o primeiro membro das equações, transformação denominada *preparação do sistema*.

Eliminando os denominadores, temos:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 59 \\ 3x - 33 = 12 - 7y + x \end{cases}$$

Transpondo os têrmos e reduzindo, obtemos, então, o sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 59 \\ 2x + 7y = 45 \end{cases}$$

Para resolvê-lo por adição, multipliquemos a primeira equação por -2 e a segunda por 3, resultando

$$-6x - 4y = -118$$
$$6x + 21y = 135$$

adicionando, membro a membro, temos:

$$17y = 17$$

donde resulta: $y = 1$

Substituindo êste valor na primeira equação do último sistema, temos:

$$3x + 2 \times 1 = 59$$

ou, transpondo $3x = 57$

donde, finalmente: $x = \dfrac{57}{3} = 19$

A solução do sistema é $x = 19$, $y = 1$.

22. Sistema de equações literais. Os sistemas literais são resolvidos pelos mesmos processos de eliminação empregados nos sistemas numéricos.

Exemplo. Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2ax + by = 4ab \\ 3ax - by = ab \end{cases}$$

Utilizando a eliminação por adição, teremos:

$$5ax = 5ab$$

donde $x = \dfrac{5ab}{5a} = b$

Substituindo êste valor na primeira equação, resulta:

$$2ab + by = 4ab$$

ou, transpondo e reduzindo: $by = 2ab$
donde

$$y = \frac{2ab}{b} = 2a$$

A solução do sistema é: $x = b$, $y = 2a$.

23. Discussão. *Os sistemas de duas equações com duas incógnitas*, podem, depois de eliminados os denominadores e feitas as transposições convenientes, ser reduzidos à forma:

$$\begin{cases} a x + b y = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad \begin{vmatrix} b' \\ -b \end{vmatrix} \begin{matrix} -a' \\ a \end{matrix}$$

Resolvendo o tipo geral dos sistemas de duas incógnitas pelo processo da adição, obteremos:

$$\begin{array}{ll} ab'x + bb'y = cb' & -aa'x - ba'y = -ca' \\ -ba'x - bb'y = -bc' & aa'x + ab'y = ac' \\ \hline (ab' - ba')x = cb' - bc' & (ab' - ba')y = ac' - ca' \end{array}$$

A possibilidade do sistema depende do valor do coeficiente $ab' - ba'$. Assim, podemos considerar dois casos.

PRIMEIRO CASO: ***$ab' - ba'$ é diferente de zero.*** Neste caso, podemos dividir os dois membros das equações por $ab' - ba'$, e obteremos a solução única do sistema:

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \quad \text{e} \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

O sistema é *determinado*.

SEGUNDO CASO: ***O coeficiente $ab' - ba'$ é nulo.*** Neste caso não podemos dividir os dois membros das equações pelo coeficiente $ab' - ba'$ e devemos formular sôbre os segundos membros das equações duas *hipóteses*.

PRIMEIRA HIPÓTESE. *Os segundos membros das equações são diferentes de zero.*

Neste caso, representando os segundos membros por N_1 e N_2, números diferentes de zero, as equações terão a forma:

$$0x = N_1 \quad \text{e} \quad 0y = N_2$$

Como não há valôres de x e y que, multiplicados por zero dêem os produtos N_1 e N_2, conclui-se: ***o sistema é impossível.***

SEGUNDA HIPÓTESE. *Os segundos membros das equações são nulos.*

As equações assumirão a forma:

$$0x = 0 \quad \text{e} \quad 0y = 0$$

Quaisquer valôres de x e y verificarão as equações e o sistema é ***indeterminado.***

Resumo da discussão. Por comodidade representaremos o denominador comum das incógnitas $(ab' - ba')$ por D e os numeradores, respectivamente, por N_1 e N_2. Assim, a solução será representada pelas fórmulas:

$$x = \frac{N_1}{D} \quad \text{e} \quad y = \frac{N_2}{D}$$

e teremos, em resumo, designando por N um qualquer dos numeradores:

a)	$D \neq 0$		Uma única solução — sistema determinado.
b)	$D = 0$	$N \neq 0$	Nenhuma solução – sistema impossível.
		$N = 0$	Infinidade de soluções – sistema indeterminado.

Exemplo: Determinar m no sistema

$$mx + y = 7$$
$$9x + 3y = 14$$

de modo que o sistema seja impossível.

Resolução. De acôrdo com a discussão do sistema devemos ter

$$ab' - ba' = 0$$

e

$$cb' - bc' \neq 0$$

para que o sistema seja impossível.

Substituindo pelos valôres dados, teremos:

$$3m - 9 = 0 \therefore m = 3$$

e

$$21 - 14 \neq 0, \quad \text{o que se verifica.}$$

Concluímos: o sistema é impossível para $m = 3$.

EXERCÍCIOS

Resolver os sistemas:

1. $\begin{cases} 12x - 5y = 19 \\ 8x + 5y = 21 \end{cases}$ *Resp.:* $x = 2$; $y = 1$

2. $\begin{cases} 5x - 3y = 7 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$ *Resp.:* $x = 2$; $y = 1$

3. $\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ 10x + y = 18 \end{cases}$ *Resp.:* $x = 8/5$ e $y = 2$

4. $\begin{cases} 7x + 2y = 15 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ *Resp.:* $x = 2$; $y = 1/2$

5. $\begin{cases} 4x + 5y = 26 \\ 6x - 11y = 2 \end{cases}$ *Resp.:* $x = 4$; $y = 2$

6. $\begin{cases} 2ax + by = 4ab \\ 3ax - by = ab \end{cases}$ *Resp.:* $x = b$; $y = 2a$

7. $\begin{cases} 7x - 2y = 31 \\ 8x + 3y = 46 \end{cases}$ *Resp.:* $x = 5$, $y = 2$

8. $\begin{cases} 6x + 5y = 24 \\ 15x + y = 14 \end{cases}$ *Resp.:* $x = \frac{2}{3}$, $y = 4$

9. $\begin{cases} x = \dfrac{22 - 4y}{7} \\ x = \dfrac{5y}{4} - \dfrac{1}{2} \end{cases}$ *Resp.:* $x = 2$, $y = 2$

10. $\begin{cases} x + 5y = 103 \\ 23x - 18y = 108 \end{cases}$ *Resp.:* $x = 18$, $y = 17$

11. $\begin{cases} 14x - 15y = 13 \\ 7x + 3y = 10 \end{cases}$ *Resp.:* $x = 1\frac{2}{7}$, $y = \frac{1}{3}$

12. $\begin{cases} 3(x - y) + 5(y - x) = 18 \\ 2x + 3y = 37 \end{cases}$ *Resp.:* $x = 2$, $y = 11$

13. $\begin{cases} 4x - 6y = 12 \\ 2x + y = 22 \end{cases}$ *Resp.:* $x = 9$; $y = 4$

14. $\begin{cases} ax + by = c \\ ax - cy = b \end{cases}$ *Resp.:* $x = \dfrac{b^2 + c^2}{a(b+c)}$, $y = \dfrac{c - b}{b + c}$

15. $\begin{cases} 2x + 5y = 39 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$ *Resp.:* $x = 7$, $y = 5$

16. $\begin{cases} 7x + 6y = 20 \\ 2x + 5y = 32 \end{cases}$ *Resp.:* -4 e 8

17. $\begin{cases} 6x - 7y = 11 \\ 5x - 6y = 8 \end{cases}$ *Resp.:* 10 e 7

18. $\begin{cases} x + y = a \\ x = by \end{cases}$ *Resp.:* $x = \dfrac{ab}{b + 1}$, $y = \dfrac{a}{b + 1}$

19. $\begin{cases} 7x + 2(y - 3) = 8 \\ x = y + 7(x - 1) \end{cases}$ *Resp.:* $x = 0$, $y = 7$

20. $\begin{cases} 5(1 - 3x) = 4 + 2(y - 1) \\ 12x - 5 = 3(1 - 8y) \end{cases}$ *Resp.:* $x = \frac{1}{6}$; $y = \frac{1}{4}$.

21. $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 5 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = \dfrac{19}{6} \end{cases}$ *Resp.:* $x = 9$, $y = 4$

22. $\begin{cases} \dfrac{x - 1}{8} + \dfrac{y - 2}{5} = 2 \\ 3x + y = 34 \end{cases}$ *Resp.:* $x = 9$; $y = 7$

23. $\left\{ \dfrac{x + 1}{10} = \dfrac{3y - 5}{2} = \dfrac{x - y}{8} \right.$ *Resp.:* $x = 19$, $y = 3$

24. $\begin{cases} -(x + 2)(y + 3) + (x + 3)(y + 2) = 4 \\ 2(x + 1) + 3(y - 2) = 23 \end{cases}$ *Resp.:* $x = 3$; $y = 7$

25. $\begin{cases} \dfrac{2x + 3y}{5} = 10 - \dfrac{y}{3} \\ \dfrac{4y - 3x}{6} = \dfrac{3x}{4} + 1 \end{cases}$ *Resp.:* $x = 4$; $y = 9$

26. $\begin{cases} \dfrac{3x-y}{2} + \dfrac{3y-x}{6} = 10\,\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{3(x-y)}{5} - \dfrac{2x+y}{10} = \dfrac{18}{5} \end{cases}$ *Resp.:* $x = 8,\ y = -\dfrac{4}{7}$

27. $\begin{cases} 5x - \dfrac{1}{4}(5y+2) = 32 \\ 3y + \dfrac{1}{3}(x+2) = 9 \end{cases}$ *Resp.:* $x = 7,\ y = 2$

28. $\begin{cases} 0{,}1x + 0{,}5y = 0{,}35 \\ 3{,}1x - 2y = 2{,}1 \end{cases}$ *Resp.:* $x = 1,\ y = 0{,}5$

29. $\begin{cases} \dfrac{3x}{2} - \dfrac{y}{5} = 1{,}1 \\ \dfrac{2x}{5} + 0{,}3y = 1 \end{cases}$ *Resp.:* $x = 1,\ y = 2$

30. $\begin{cases} 1\,\dfrac{1}{3}\,x = 1\,\dfrac{1}{2}\,y + \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{3}\,x = 2\,\dfrac{1}{4}\,y - 5\,\dfrac{5}{12} \end{cases}$ *Resp.:* $x = 4,\ y = 3$

31. $\begin{cases} \dfrac{7x-21}{6} + \dfrac{3y-x}{3} = 4 + \dfrac{3x-19}{2} \\ \dfrac{2x+y}{2} - \dfrac{9x-7}{8} = \dfrac{3y+9}{4} - \dfrac{4x+5y}{16} \end{cases}$ *Resp.:* $x = 9,\ y = 4$

32. $\begin{cases} \dfrac{x}{2b} + \dfrac{y}{3a} = 1 \\ \dfrac{x-y}{12a} - \dfrac{x}{8b} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ *Resp.:* $x = 9a,\ y = \dfrac{6ab - 27a^2}{2b}$

33. $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = b \\ \dfrac{y}{a} - \dfrac{x}{b} = a \end{cases}$ *Resp.:* $x = \dfrac{ab^3 - a^3b}{a^2+b^2},\ y = \dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$

34. $\begin{cases} \dfrac{x}{2a} + \dfrac{y}{3b} = \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{2x}{3a} - \dfrac{y}{2b} = \dfrac{1}{6} \end{cases}$ *Resp.:* $x = a,\ y = b$

35. $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{y} = 3{,}5 \\ \dfrac{2x-y}{x+y} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$ *Resp.:* $x = 10$ e $y = 8$

36. $\begin{cases} \dfrac{x-y}{3} - \dfrac{y-3x}{5} = 8 \\ \dfrac{2(x-y)}{3} + \dfrac{x+y}{9} = 6 \end{cases}$ *Resp.:* $x = 12$ e $y = 6$

37. $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{(a+b)^2}{ab} \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \dfrac{b^2-a^2}{ab} \end{cases}$ *Resp.:* $x = y = a + b$

38. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{8a} + \dfrac{x-y}{12b} = 1 \\ \dfrac{x}{4a+6b} + \dfrac{y}{4a-6b} = 1 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} x = 2a + 3b \\ y = 2a - 3b \end{cases}$

39. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{a} - \dfrac{y-y}{b} = 4 \\ \dfrac{x}{a-b} + \dfrac{y}{a+b} = 2 \end{cases}$ *Resp.:* $x = a - b$ e $y = a + b$

40. $\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{y-2} = 0 \end{cases}$ *Resp.:* Impossível. A solução $x = 1$, $y = 2$, anula os denominadores da equação fracionária (Text-Book, Tomo I).

Resolver e discutir os sistemas:

41. $\begin{cases} 7x + 6y = 20 \\ 2x + 5y = 32 \end{cases}$ *Resp.:* -4 e 8

42. $\begin{cases} 3x - 6y = 15 \\ 4x - 8y = 18 \end{cases}$ *Resp.:* Impossível

43. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$ *Resp.:* Indeterminado

44. Achar os valôres de m para que o sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - my = 11 \end{cases}$$

admita uma única solução. *Resp.:* $m \neq 6$

45. Determinar o valor de m no sistema

$$\begin{cases} 4x + my = 14 \\ mx + 9y = 21 \end{cases}$$

de modo que: 1.°) O sistema seja indeterminado.
2.°) O sistema seja impossível.

Resp.: $m = 6$ e $m = -6$

46. Determinar os valôres de a e b, de modo que o sistema

$$\begin{cases} ax - by = 4 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$$

seja indeterminado. *Resp.:* $a = 12$ e $b = -20$

IV — PROBLEMAS DO PRIMEIRO GRAU

24. Problemas. Dados e incógnitas. Num problema figuram quantidades conhecidas e as relações que as ligam com quantidades desconhecidas, cujo valor se procura determinar.

As quantidades conhecidas e as relações são os ***dados*** do problema. As quantidades desconhecidas são as ***incógnitas.***

Resolver um problema é achar os valôres das incógnitas que satisfazem as relações do enunciado. Êstes valôres constituem a ***solução*** do problema.

Se representarmos as incógnitas por letras, as relações que as ligam com os dados podem ser traduzidas por equações. Estas equações denominam-se as ***equações do problema.***

A resolução das equações conduz à solução do problema.

Um problema diz-se do primeiro grau quando suas equações são do primeiro grau.

25. Fases da resolução de um problema. A resolução algébrica de um problema se desenvolve em três fases:

a primeira consiste em *pôr o problema em equação;*

a segunda consiste em *resolver a equação;*

a terceira consiste em *discutir ou interpretar a solução obtida.*

A segunda fase obedece a regras fixas já conhecidas e dela não trataremos.

PRIMEIRA FASE: ***Pôr um problema em equação.*** Para pôr um problema em equação, supomos o mesmo resolvido, e representamos a incógnita por uma letra; indicamos, então, com esta letra, as operações que permitam verificar estarem preenchidas as relações do enunciado. Seja, por exemplo, o seguinte problema:

Qual o número que somado à sua têrça parte dá 12?

Representemos o número procurado por x

A sua têrça parte será $\frac{x}{3}$

A soma com a têrça parte será $x + \frac{x}{3}$

Como essa soma é 12, temos a equação do problema:

$$x + \frac{x}{3} = 12$$

SEGUNDA FASE: ***Resolução da equação.*** Temos:

$$3x + x = 36$$
$$4x = 36$$
$$x = 9$$

TERCEIRA FASE: ***Discussão.*** A raiz da equação de um problema satisfaz sempre a mesma equação; no entanto, dada a natureza concreta do problema, pode não convir ao mesmo. Assim, se um problema tiver para incógnita um certo número de pessoas, e a raiz da equação correspondente fôr fracionária, a mesma não convirá ao problema; êste será impossível.

Daí a necessidade de interpretar a raiz obtida para a equação.

No caso dos problemas *gerais,* em que as quantidades dadas são representadas por letras, a discussão consiste em determinar as condições a que devem satisfazer estas letras para que o problema seja possível.

26. Resolução de problemas. Exemplos:

PROBLEMA 1. *Estando um tanque cheio de água, escoam-se sessenta e oito litros, ficando ainda com água a têrça parte do tanque. Qual a sua capacidade?*

I) Seja x a capacidade do tanque. Estando êle cheio, continha x litros de água e, depois de escoados os 68 litros, ficou com $x - 68$ litros; como êstes se continham na têrça parte do tanque, devemos ter:

$$x - 68 = \frac{x}{3}$$

que é a equação do problema.

II) Resolvendo-a, obteremos sucessivamente:

$$3x - 204 = x$$

ou $2x = 204$, donde $x = 102$.

III) A capacidade do tanque é de 102 litros.

PROBLEMA 2. *Dos alunos de um colégio um têrço é interno, um quarto, semi-interno e 150 externos. Achar o número de alunos internos e semi-internos.*

I) Representemos por x o número total.

De acôrdo com a primeira condição, o número de internos será, em linguagem algébrica, $\frac{x}{3}$.

De acôrdo com a segunda condição, o número de semi-internos será $\frac{x}{4}$.

Há ainda uma terceira condição necessária à resolução, embora não esteja explìcitamente transcrita no enunciado: *a soma do número de internos, semi-internos e externos é igual ao total.* Traduzindo esta última condição em linguagem algébrica:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 150 = x$$

que é a equação do problema.

II) Resolvendo a equação, temos:

$$4x + 3x + 1\,800 = 12x$$

ou $5x = 1\,800$

donde $x = 360$

Concluímos: $\frac{x}{3} = 120$ e $\frac{x}{4} = 90$

II) Como os valores obtidos são inteiros e positivos, convêm ao problema; temos, pois, a solução: 120 são internos e 90 semi-internos.

Observemos que a única condição implìcitamente contida no problema, é muito fácil de perceber, pois nenhum conhecimento particular exige.

PROBLEMA 3. *Achar dois números, cuja diferença é 9, sendo 17 um têrço da sua soma.*

I) Representando os números procurados por x e y, teremos, de acôrdo com as condições do enunciado:

$$x - y = 9 \quad \text{(primeira condição)}$$

$$\frac{x + y}{3} = 17 \quad \text{(segunda condição)}$$

II) Resolvendo o sistema, teremos:

$$\begin{cases} x - y = 9 \\ x + y = 51 \end{cases}$$

adicionando: $2x = 60$

donde $x = 30$

Subtraindo a primeira da segunda, temos:

$$2y = 42$$

donde $y = 21$

III) Os números procurados são: 30 e 21.

PROBLEMA 4. *A soma dos dois algarismos de um número é 8 e, se o mesmo fôr adicionado a 54, o resultado terá os mesmos algarismos permutados. Achar o número.*

I) Seja x o algarismo das dezenas e y o das unidades.
O número será, então, $10x + y$.
De acôrdo com as condições do enunciado, devemos ter:

$$x + y = 8$$

e
$$10x + y + 54 = 10y + x$$

II) Transpondo os têrmos da segunda equação, temos o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 9x - 9y = -54 \end{cases}$$

ou, dividindo por 9 a segunda equação:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = -6 \end{cases}$$

Resolvendo por adição, temos:

$$\begin{cases} 2x = 2 \\ 2y = 14 \end{cases} \therefore \begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases}$$

III) O número é 17.

27. Interpretação de soluções. Problemas impossíveis.

*a) **Solução positiva.***

Problema 1. *Numa oficina trabalham homens e mulheres que recebem ao todo 1800 cruzeiros por dia. Cada homem ganha 180 cruzeiros e cada mulher 150 cruzeiros por dia. Achar o número de homens, que excede de 7 o de mulheres.*

I) Seja x o número de homens; o de mulheres será, pois, $x - 7$.

Os homens receberão por dia $180x$ e as mulheres $150(x - 7)$.

Como, ao todo, recebem 1800 cruzeiros por dia, temos a equação:

$$180x + 150(x - 7) = 1800$$

II) Resolvendo-a, obtemos, simplificando prèviamente:

$$18x + 15x - 105 = 180$$

ou
$$33x = 285$$

donde:
$$x = \frac{285}{33} = 8\frac{21}{33}$$

III) Como o número de homens não pode ser fracionário, concluímos que o problema é impossível.

Problema 2. *Os alunos de uma lição de educação física foram formados em quadrado e sobraram 7. Modificada a formatura, com 5 alunos mais de frente e 3 menos de profundidade, sobrou 1. Quantos alunos compareceram à lição?*

I) Seja x o número de alunos em cada lado do quadrado na primeira formatura. Na segunda formatura, o número de alunos, em linha, será $x + 6$ e, em coluna, $x - 3$.

O número de alunos, presentes à lição, pode ser representado por duas expressões:

$x^2 + 7$, segundo a primeira formatura,

e $(x + 5)(x - 3) + 1$, tendo em vista a segunda formatura,

II) Daí, a equação: $x^2 + 7 = (x + 5)(x - 3) + 1$.

Resolvendo-a, temos:

$$x^2 + 7 = x^2 + 2x - 15 + 1$$

ou
$$2x = 21$$

donde
$$x = 10\ ^1/_2$$

III) O resultado $10\ ^1/_2$ satisfaz à equação, mas não ao problema, pois x representa o número de alunos, que deve ser inteiro.

A impossibilidade da solução positiva, indica que as condições do enunciado são contraditórias e o problema é impossível.

b) ***Solução negativa.*** Na maioria dos casos a solução negativa indica impossibilidade. Todavia, quando a incógnita representa a medida de uma grandeza suscetível de variar em dois sentidos opostos, podemos interpretar a solução negativa, atribuindo à incógnita sentido contrário ao que lhe é dado no enunciado.

Exemplos:

PROBLEMA 1. *Duas pessoas têm, respectivamente, 18 e 12 anos. Quantos anos faltam para que a idade da primeira seja o dôbro da idade da segunda?*

I) Seja x o número de anos. No fim de x anos, a idade da primeira será $18 + x$ e a da segunda $12 + x$; de acôrdo com o enunciado, devemos ter:

$$18 + x = 2(12 + x)$$

que é a equação do problema.

II) Resolvendo-a, obteremos $x = -6$.

III) A solução negativa indica que o problema, tal como foi enunciado, não tem solução. No entanto, podendo o tempo variar em dois sentidos, a solução negativa será interpretada, como indicação de que a idade da primeira foi o dôbro da da segunda, há seis anos.

Isto corresponde a modificar o enunciado para o seguinte:

Duas pessoas têm respectivamente 18 e 12 anos. Há quantos anos a idade da primeira foi o dôbro da da segunda?

Resultaria a equação $18 - x = 2(12 - x)$, que corresponde a substituir x por $-x$ na anterior.

Se a incógnita não puder ser tomada no sentido oposto, o problema é impossível.

PROBLEMA 2. *Duas estações, A e B, de uma linha férrea, distam 20km. Um trem parte da estação A para B com a velocidade de 50km/h; no mesmo instante, parte de B um segundo trem que percorre a linha na mesma direção do primeiro, com a velocidade de 60km/h. A que distância da estação A se encontrarão?*

Verifica-se, por simples inspeção, a impossibilidade.

Suponhamos, no entanto, que se encontram num ponto C, a uma distância x do ponto A.

O primeiro trem percorrerá a distância x, e como sua velocidade é de 50km, o tempo gasto no percurso será $\frac{x}{50}$.

O segundo trem percorre a distância $x - 20$ e o tempo gasto será $\frac{x-20}{60}$. Como partem no mesmo instante, os dois tempos são iguais; temos, pois, a equação:

$$\frac{x}{50} = \frac{x-20}{60}$$

Resolvendo-a, temos, sucessivamente:

$$60x = 50x - 1\,000$$

ou $$10x = -1\,000$$

donde $$x = -100$$

A solução negativa mostra que os trens não se encontrarão. No entanto, podemos concluir que os dois trens se encontraram antes da estação A num ponto C situado 100km à esquerda de A.

EXERCÍCIOS

1. Achar os lados de um paralelogramo cujo perímetro vale 21m, sendo o lado maior o dôbro do menor.

   Resp.: 7 e 3,5

2. Um segmento de 33cm foi dividido em duas partes, de modo que a maior ficou com 5cm mais que a outra. Qual o comprimento de cada parte?

   Resp.: 14 e 19cm

3. Achar uma fração eqüivalente a $\frac{2}{3}$ e cuja soma dos têrmos seja 75.

   Resp.: $\frac{30}{45}$

4. Qual o número que somado à sua têrça parte dá 12?

   Resp.: 9

5. A soma de dois números é 186 e o maior é o dôbro do menor. Quais são os números?

   Resp.: 62 e 124

6. Um tanque estava cheio dágua, deixou-se escoar sessenta e oito litros, ficando ainda com água a têrça parte do tanque. Qual a capacidade do tanque?

   Resp.: 102 litros

7. Qual o número, cujo triplo o excede de 16 unidades?

   Resp.: 8

8. A soma de dois números é 80; o maior excede o dôbro do menor de 5 unidades. Quais são os números?

   Resp.: 25 e 55

9. Haroldo tem 3 vêzes mais laranjas que Pedro e os dois juntos têm 32. Quantas tem cada um?

   Resp.: 8 e 24

10. Somando a um certo número a sua metade e do resultado subtraindo 84, obtém-se 105. Qual é o número?

    Resp.: 126

11. Certa quantia foi repartida entre três pessoas. A primeira recebeu os $\frac{2}{5}$ mais Cr$ 6,00. A segunda recebeu $\frac{1}{5}$ da quantia e mais Cr$33,00 e a terceira recebeu Cr$33,00 restantes. Determinar a quantia repartida e a parte de cada pessoa.

    Resp.: Cr$180,00; Cr$78,00, Cr$69,00, Cr$33,00

12. Uma pessoa dispõe de três horas para fazer um passeio e sai numa charrete que percorre 12km por hora. A que distância do ponto de partida deve saltar para poder voltar a pé, percorrendo 4km por hora?

    Resp.: 9km

13. Um chacareiro leva ao mercado certo número de ovos que desejava vender a Cr$3,00 cada um; porém, tendo quebrado 15, verificou que, se vendesse os restantes a Cr$3,50, teria o mesmo lucro. Qual o número de ovos?

    Resp.: 105

14. Certa quantia foi repartida entre três pessoas. A primeira recebeu os 2/5 mais Cr$6,00; a segunda recebeu 1/3 do resto mais Cr$33,00 e a terceira recebeu Cr$ 53,00 que restaram. Qual a quantia repartida?

    Resp.: Cr$ 225,00

15. Um tanque é alimentado por duas torneiras; a primeira pode enchê-lo em 5 horas e a segunda em 4. Em que tempo o encherão as duas torneiras, correndo juntas?

    Resp.: 2h 13m 20s

16. A base de um retângulo é 6 metros maior e a altura 3 metros menor que o lado do quadrado da mesma área. Determinar o lado e a área do quadrado.

    Resp.: 6m e 36m²

17. Interrogado sôbre sua idade, responde um menino: há oito anos eu tinha um quarto da idade que terei daqui a um ano. Que idade tem o menino?

    Resp.: 11 anos

18. Achar um número sabendo que a diferença entre êle e a soma de seus $\frac{14}{27}$ com seus $\frac{4}{9}$ é 11

    Resp.: 297

19. Havia 9 dias que *A* trabalhava e tinha realizado 3/8 de uma certa obra, quando chegou *B* para auxiliá-lo e, juntos, gastaram ainda três dias para terminá-la. Em quantos dias teria *B* realizado o trabalho sòzinho?

    Resp.: 6 dias

20. Certa pessoa vende uma propriedade por 238 mil cruzeiros. Se tivesse vendido por mais 72 mil cruzeiros o lucro teria sido de 2/3 do preço que lhe custara. Qual o preço de custo?

Resp.: Cr$186 000,00

21. Um número é formado de dois algarismos, sendo o das dezenas o triplo do das unidades. Se dêle subtrairmos 36, obteremos um número formado pelos mesmos algarismos permutados. Qual é o número?

Resp.: 62

22. A soma de dois números é 73 e a diferença 37. Achar os dois números.

Resp.: 55 e 18

23. A metade da soma de dois números é 15, e três vêzes a diferença é 36. Achar os dois números.

Resp.: 21 e 9

24. A soma dos dois algarismos de um número é 9. Se dêle subtrairmo 27 o resultado terá os mesmos dois algarismos permutados. Acha o número.

Resp.: 63

25. Achar uma fração igual a $\frac{5}{8}$ e cuja soma dos têrmos seja 143.

Resp.: $\frac{55}{88}$

26. Se somarmos uma unidade aos dois têrmos de uma fração obteremos outra fração igual a $\frac{1}{2}$ e se subtrairmos uma unidade dos dois têrmos obteremos outra igual a $\frac{1}{3}$. Qual a fração?

Resp.: $\frac{3}{7}$

27. Sendo as dimensões de um retângulo aumentadas de 3 metros cada uma, a área aumenta de 99 metros quadrados; e se o comprimento fôr aumentado e a largura diminuída de 4 metros, a área diminui de 56 metros quadrados. Calcular as dimensões do retângulo.

Resp.: 10 e 20 metros

28. A soma de duas frações, cujos denominadores são, respectivamente, 3 e 6, é $1^1/_2$; se passarmos o numerador da segunda para a primeira e reciprocamente a soma será 2. Achar as frações.

Resp.: $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{6}$

29. Dividindo um número de dois algarismos pela soma dêstes o quociente é 7 e o resto 6. Trocando a posição dos algarismos e dividindo-o pela diferença dos mesmos, o quociente é 6 e o resto 2. Ahcar o número.

Resp.: 62

30. Uma pessoa percorre 44 quilômetros, uma parte com a velocidade de 4 quilômetros por hora e o resto a 5km/h. Se tivesse caminhado 5 quilômetros por hora durante o tempo que caminhou 4, e reciprocamente, teria percorrido dois quilômetros mais no mesmo tempo. Durante quanto tempo caminhou?

Resp.: 10 horas

31. Um cesto contém bolas pretas e brancas. A metade do número de brancas é um têrço do número de pretas; e o número total excede o dôbro do número de brancas de 4 unidades. Achar o número de bolas.

Resp.: 8 brancas e 12 pretas

32. Em 9 horas um correio A percorre 1 quilômetro mais que B em 11; e, em 10 horas, B percorre 5 quilômetros mais que A em 7. Quantos quilômetros percorre por hora cada um?

Resp.: 5 e 4

33. Duas pessoas estão na mesma estrada e afastadas 24 quilômetros. Partindo no mesmo instante, encontrar-se-ão no fim de 12 horas se caminharem no mesmo sentido, e no fim de 3 horas se caminharem em sentidos opostos. Qual a velocidade de cada uma?

Resp.: 5 e 3

34. As idades de A e B somam 45 anos e há 5 anos a idade de A era quatro vêzes a de B. Que idades têm agora A e B?

Resp.: 33 e 12 anos

35. Um grupo de meninos recebe doze livros para serem distribuídos igualmente. Se houvessem dois meninos menos, cada um receberia o triplo. Quantos eram os meninos?

Resp.: 3

36. Um tanque é alimentado por duas torneiras que podem enchê-lo em 3 e 4 horas, respectivamente. O cano de escoamento pode esvasiá-lo em 6 horas. Em quantas horas o tanque ficará cheio, se forem abertas as torneiras e o cano de escoamento?

Resp.: 2h 24 min

37. Em um número de três algarismos o das dezenas é o dôbro do das unidades, e o das centenas o dôbro do das dezenas. A soma dos algarismos é 14. Achar o número.

Resp.: 842

38. Achar a base maior de um trapézio cuja área é de $84m^2$, a altura tem 7m e a base menor 9m. *Resp.:* 15m

39. Qual o número que se deve subtrair de cada um dos dois têrmos da fração $\frac{5}{9}$ para obter outra eqüivalente a $\frac{1}{3}$?

Resp.: 3

40. Numa corrida de aviões os dois primeiros classificados fizeram o percurso com 18 minutos de diferença com as velocidades de 300 e 270 quilômetros a hora. Calcular o percurso em quilômetros.

Resp.: 810km

41. Sendo uma fração eqüivalente a $\frac{3}{7}$, se aumentarmos o numerador de 7 unidades e diminuirmos o denominador da mesma quantidade, a fração resultante é eqüivalente a $\frac{2}{3}$. Achar a fração

Resp.: $\frac{21}{49}$

42. Um automóvel percorre 270km num certo tempo. Se sua velocidade fôr aumentada de 5km/h percorrerá 30km mais no mesmo tempo. Qual a velocidade do automóvel? *Resp.:* 45km/h

43. Um professor havia proposto 20 problemas a um aluno, estabelecendo que o mesmo receberia 5 pontos a seu favor por solução certa e 3 pontos contra por solução errada ou problema não resolvido. O número de pontos a favor do aluno excedeu de 52 o número de pontos contra. Quantas soluções certas apresentou o aluno?

Resp.: 14

44. Um tanque é alimentado por duas torneiras. A primeira gasta o dôbro do tempo da segunda para enchê-lo. As duas torneiras, correndo juntas, enchem o tanque em 40 minutos. Achar o tempo necessário para que cada uma encha o tanque, correndo só.

Resp.: 1h e 2h

45. Um negociante compra fazenda a Cr$120,00 o metro. No transporte estragam-se 2m e êle vende o resto a Cr$150,00, tendo Cr$1140,00 de lucro. Quantos metros comprou? *Resp.:* 48m

46 Se adicionarmos uma unidade aos dois têrmos de uma fração à mesma tornar-se-á eqüivalente a 5/6; e, se subtrairmos três unidades, aos dois têrmos, tornar-se-á eqüivalente a 4/5. Achar a fração.

Resp.: $\frac{19}{23}$

47. *A* gasta 3 horas mais que *B* para percorrer 30km; mas, se dobrar a extensão do seu passo, gastará 2 horas menos que *B*. Achar a velocidade de cada um.

Resp.: 3km/h e 4 2/7km/h

48. Dois operários podem construir um muro em 4 dias, trabalhando juntos. Tendo o primeiro trabalhado sòzinho durante 2 dias, entregou o serviço ao segundo que construiu a parte restante em 8 dias de trabalho. Em que tempo construirá o muro cada um dos operários?

Resp.: 6 e 12 dias

49. Que horas são, se o número de horas decorridas a partir de meio dia excede 5 unidades o sêxtuplo do número de horas restantes até meia noite?

Resp.: 11

50. Doze rapazes se quotizaram para comprar um barco; porém, dois ficaram impossibilitados de pagar, tendo cada um dos outros de dar Cr$40,00 mais que a sua quota. Qual o preço do barco? Qual a quota de cada um? Resolver e discutir.

Resp.: Cr$2 400,00; Cr$200,00